

**Zur Auflösung der Entartungen gewisser
holomorpher Abbildungen**

Joseph Maurer
—

1977
—

ZUR AUFLÖSUNG DER ENTARTUNGEN GEWISSE
HOLOMORPHER ABBILDUNGEN

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von
Joseph M a u r e r
aus Puchheim

eingereicht am:
14. Dezember 1976

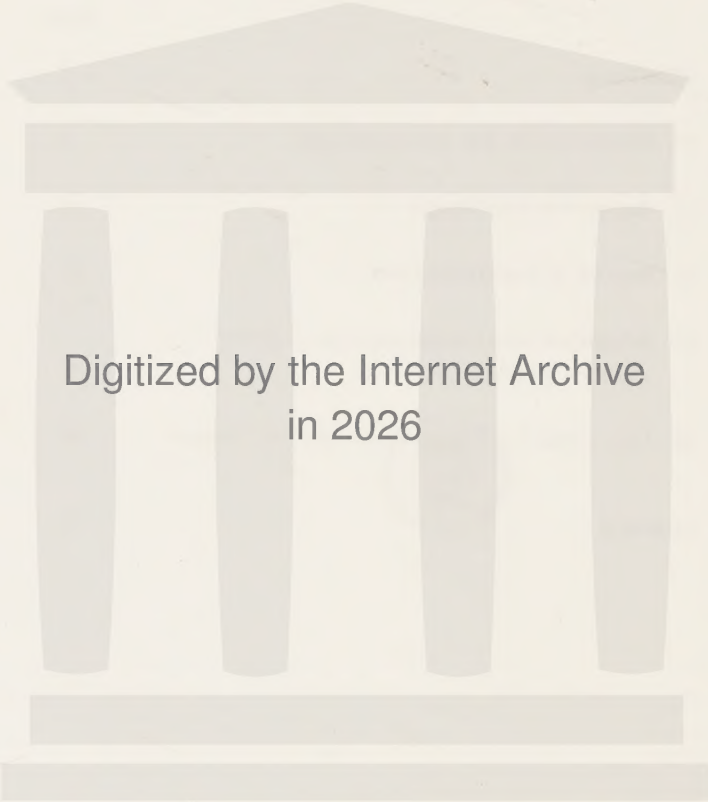


1. Berichterstatter: Prof. Dr. Karl Stein
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Klaus Wolffhardt

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juni 1977

I N H A L T

	Seite
Einleitung	1
§0. Bezeichnungen und Vereinbarungen	6
§1. Meromorphe Abbildungen	10
§2. Monoidale Transformationen	21
§3. Holomorphe Abbildungen zwischen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten	48
§4. Fast überall endliche holomorphe Abbildungen	68
Literatur	75



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINLEITUNG

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, so braucht die Dimension der Fasern $f^{-1}(y)$ nicht konstant zu sein. Das einfachste Beispiel dafür ist $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(x,y) \mapsto (x,xy)$, wo $f^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{C}$, also 1-dimensional ist, während alle anderen Fasern nur aus einem Punkt bestehen oder leer sind. Allgemein bezeichnet man bei einer holomorphen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen reduzierten, irreduziblen komplexen Räumen die Menge

$$E_f := \{x \in X: \dim_x f^{-1}(f(x)) > \min_{x' \in X} \dim_{x'} f^{-1}(f(x'))\}$$

als *Entartungsmenge* von f , und nennt f *entartet*, wenn E_f nicht leer ist.

Spezielle Beispiele für entartete holomorphe Abbildungen liefern die sogenannten *monoidalen Transformationen* (insbesondere die σ -Prozesse). Sie entstehen dadurch, daß ein (abgeschlossener) komplexer Unterraum D eines komplexen Raumes X aufgeblasen wird zu einer Hyperfläche D^* in einem neuen komplexen Raum X^* , der außerhalb von D^* mit $X \setminus D$ übereinstimmt. Genauer: Man hat eine (eigentliche) holomorphe Abbildung $h: X^* \rightarrow X$ mit den Eigenschaften

- $h^{-1}(D) = D^*$ ist Hyperfläche in X^* und
- $h|_{X^* \setminus D^*} \longrightarrow X \setminus D$ ist biholomorph.

Darüberhinaus werden für ein X mit gegebenem Zentrum D der Raum X^* und die Abbildung h (bis auf Isomorphie) eindeutig charakterisiert durch eine universelle Eigenschaft, und die Konstruktion hat einen unmittelbaren geometrischen Hintergrund. Im Falle, daß die Kodimension von D in X größer als 1 ist, erhält man so eine sehr natürliche Klasse von entarteten holomorphen Abbildungen. Der Spezialfall $X = \mathbb{C}^2$, $D = \{(0,0)\}$ (mit der reduzierten Struktur) ergibt genau den klassischen HOPFSchen σ -Prozeß.

Es bietet sich nun an, diese monoidalen Transformationen zur Auflösung der Entartungen allgemeiner holomorpher Abbildungen heranzuziehen. Man denkt dabei etwa an eine Aussage der folgenden Art:

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zwischen reduzierten irreduziblen komplexen Räumen. Dann gibt es eigentliche Modifikationsabbildungen $h: X' \rightarrow X$ und $k: Y' \rightarrow Y$ und eine holomorphe Abbildung $f': X' \rightarrow Y'$ mit konstanter Faserdimension, so daß $k \circ f' = f \circ h$ ist. Dabei entsteht $k: Y' \rightarrow Y$ durch iterierte monoidale Transformationen und X' ist der Graph der meromorphen Komposition $k^{-1} \circ f$.

(Zur Erläuterung der Begriffe siehe §§ 0,1,2).

Während meiner ersten Versuche in Richtung auf eine derartige Aussage ist die Arbeit [11] von HIRONAKA erschienen. Darin wird erwähnt, daß ihn W.L. CHOW auf eben dieses Problem hinge-

wiesen habe. HIRONAKA erschlug dieses Problem durch die Lösung eines viel schwierigeren: Sein *Flattening Theorem* beinhaltet, grob gesagt, daß jede eigentliche holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ durch iterierte monoidale Transformationen über Y sogar zu einer *platten* holomorphen Abbildung $f': X' \rightarrow Y'$ transformiert werden kann (vgl. [10] und [11] für die genaue Formulierung). Dies gilt sogar für beliebige komplexe Räume, sofern nur Y reduziert ist und abzählbare Topologie hat.

Nun ist aber der technische Aufwand für den Beweis des Flattening Theorem beträchtlich, und der Wunsch nach einfacheren, direkteren Beweisen für die ursprüngliche Fragestellung zumindest in Spezialfällen besteht weiterhin, zumal seit HOPF (1955, [13]) in dieser Richtung kaum Ergebnisse vorzuliegen scheinen. Dieser Wunsch führte mich zum Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit, nämlich dem folgenden

SATZ: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten, so daß die Funktionaldeterminante von f (in lokalen Koordinaten) nirgends identisch verschwindet. Sei $K \subset X$ eine Teilmenge, so daß die Beschränkung von f auf K eigentlich ist. Dann gibt es eigentliche Modifikationen $h: X' \rightarrow X$ und $k: Y' \rightarrow Y$ und eine holomorphe Abbildung $f': X' \rightarrow Y'$ mit $f \circ h = k \circ f'$, so daß die Beschränkung $f'|_{h^{-1}(K)} \rightarrow k^{-1}(f(K))$ endlich ist. Dabei entsteht $k: Y' \rightarrow Y$ durch iterierte σ -Prozesse über den Punkten der diskreten Menge $D := \{y \in Y: f^{-1}(y) \text{ trifft } K \text{ mit 1-dimensionalen Komponenten}\}$, und X' ist der Graph der meromorphen Komposition $k^{-1} \circ f: X \rightarrow Y'$.

Insbesondere läßt sich also eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten stets durch iterierte σ -Prozesse über Y zu einer endlichen Abbildung transformieren.

Die entsprechenden Ergebnisse von HOPF ([13]; dort wird f außerhalb der entarteten Fasern als injektiv vorausgesetzt!) folgen schnell als Spezialfall aus dem obigen Satz.

Es kann keine Aussage darüber gemacht werden, ob unser f' auch platt ist; andererseits ist zu bemerken, daß die Auflösung allein durch σ -Prozesse gelingt (Y' ist also wieder Mannigfaltigkeit), während man in HIRONAKAs Flattening Theorem auch bei Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten schon monoidale Transformationen benötigt, die im allgemeinen zu komplexen Räumen mit Singularitäten führen.

Nun noch ein kurzer Überblick über die einzelnen Abschnitte der vorliegenden Arbeit.

Nach einigen Vorbereitungen terminologischer Natur in §0 erinnern wir in §1 an einige Eigenschaften meromorpher Abbildungen und meromorpher Kompositionen, die im Folgenden immer wieder benötigt werden. Dabei wird die Bedeutung des sogenannten RITTschen Lemmas besonders herausgestellt, da es eine wesentliche Rolle in einem Teil des Beweises spielt. In §2 werden monoidale Transformationen etwas ausführlicher und allgemeiner dargestellt, als es für die Anwendungen in dieser Arbeit nötig wäre. Insbesondere wird auch eine äquivalente Konstruktion mit dem Specan -

Formalismus erläutert. Diese erlaubt es, die einzusetzende Hyperfläche auch im allgemeinsten Fall als projektivierten Normalenkegel zu beschreiben.

Der Beweis des Hauptergebnisses füllt den § 3 aus; darin spielt der Begriff des *meromorphen Keims* einer meromorphen Abbildung zwischen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten und die Untersuchung seines Verhaltens bei der Transformation mit σ -Prozessen eine besondere Rolle.

Schließlich wird in § 4 noch ein Beweis für eine Auflösung der Entartungen gewisser holomorpher Abbildungen ausgeführt, bei dem keine σ -Prozesse bzw. monoidalen Transformationen verwendet werden. Die Beweisidee stammt von STEIN, und die Ausführung baut auf SINZINGER [16] auf.

Bei der Anfertigung dieser Arbeit bin ich verständnisvoll gefördert worden durch Herrn Prof. Dr. Karl Stein, der mich auch zu diesem Themenkreis hingeführt hat. Daneben habe ich viel Nützliches bei Herrn Prof. Dr. Gerd Fischer in seiner Vorlesung "Komplex-analytische Geometrie" gelernt. Herr Prof. Dr. Klaus Wolffhardt hat durch aufmerksame und sorgfältige Kritik zu einigen wichtigen Verbesserungen beigetragen. Schließlich gilt mein Dank auch den Herren Dr. Kraus und Dr. Sinzinger für anregende Diskussionen und André Hirschowitz (Nizza) für besonders nachhaltige Ermutigungen!

§0. BEZEICHNUNGEN UND VEREINBARUNGEN

Die Grundlagen der komplex-analytischen Geometrie werden als bekannt vorausgesetzt (siehe etwa [4], [5], [15], [18]). Es sollen nur die Bezeichnungen festgelegt und einige für diese Arbeit verbindliche Vereinbarungen getroffen werden.

0.1 Komplexe Räume sind nicht notwendig reduziert. Trotzdem verwenden wir dieselben Buchstaben $f: X \rightarrow Y$ für eine holomorphe Abbildung (d.h. einen Morphismus) zwischen komplexen Räumen und die zugrundeliegende stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen. Den Garbenhomomorphismus $*f: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ (oder auch $*f: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$) hat man sich dazuzudenken. Dies ist umso unbedenklicher, als die meisten in dieser Arbeit vorkommenden komplexen Räume reduziert sein werden.

Eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen heißt *biholomorph*, wenn sie ein Isomorphismus in der Kategorie der komplexen Räume ist; die beiden komplexen Räume nennen wir dann *isomorph*.

0.2 *Unterräume* $Z \subset X$ sind in dieser Arbeit (per definitionem) immer abgeschlossen; sie werden durch kohärente Idealgarben $I \subset \mathcal{O}_X$ definiert und ihre Strukturgarbe ist $\mathcal{O}_Z := \mathcal{O}_X/I|_Z$.

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, $D \subset Y$ ein Unter-
raum, definiert durch eine Idealgarbe $J \subset \mathcal{O}_Y$, so wird $f^{-1}(D) \subset X$ definiert durch die Idealgarbe, die vom Bild des kanonischen Garben-
morphismus $f^{-1}J \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \longrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X$ in $\mathcal{O}_X$ erzeugt wird.

Speziell erhält man für einen einfachen Punkt $D = \{y\} \subset Y$ (definiert durch die Idealgarbe, deren Halm im Punkt y gleich dem maximalen Ideal $m_y \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ ist, und die auf $Y \setminus \{y\}$ mit $\mathcal{O}_Y$ übereinstimmt) in dieser Weise auf der Faser $f^{-1}(y) \subset X$ die natürliche Struktur eines (i.allg. nichtreduzierten) Unterraumes von X .

Ist f eigentlich, so ist die Bildgarbe $f_*\mathcal{O}_X$ kohärent und $\text{Ker}(\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X) =: K \subset \mathcal{O}_Y$ eine kohärente Idealgarbe in $\mathcal{O}_Y$, welche das Bild $f(X)$ als Unterraum von Y definiert. $f(X)$ ist reduziert, wenn X reduziert ist.

Wir bezeichnen einen Unterraum $A \subset X$ einfach als *analytische Teilmenge*, falls er reduziert ist oder wir nur die Reduktion betrachten wollen, d.h. von seiner möglicherweise nichtreduzierten Struktur abgesehen werden soll. Eine Teilmenge $T \subset X$ heißt *lokalanalytisch*, falls sie analytische Teilmenge in einer offenen Menge $U \subset X$ ist.

0.3 Ein Unterraum $H \subset X$ heißt *Hyperfläche*, wenn er durch eine inversible Idealgarbe definiert ist, d.h. eine Idealgarbe, die lokal durch einen Nichtnullteiler erzeugt wird. Insbesondere gilt die leere Menge als Hyperfläche.

Ist X reindimensional und $H \subset X$ eine Hyperfläche $\neq \emptyset$, so gilt stets $\dim H = \dim X - 1$; diese Dimensionsbedingung ist jedoch i. allg. nicht hinreichend (vgl. z.B. [4], 0.45).

0.4 Faserprodukte über holomorphen Abbildungen $X \rightarrow Y$, $Z \rightarrow Y$ werden stets als Unterräume $X \times_Y Z \subset X \times Z$ aufgefaßt; sie sind nicht notwendig reduziert, auch wenn X, Y, Z reduziert sind. Immerhin

ist $(X \times_Y Z)_{\text{red}}$ noch Faserprodukt in der Kategorie der reduzierten komplexen Räume (und auch in der Kategorie der topologischen Räume). Für unsere Zwecke wird dies meist genügen, und wir vereinbaren deshalb, bei reduzierten Räumen einfach $X \times_Y Z$ anstelle von $(X \times_Y Z)_{\text{red}}$ zu schreiben, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

Das Faserprodukt einer holomorphen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit sich selbst ist dann als Graph der Äquivalenzrelation $R_f = X \times_Y X \subset X \times X$ aufzufassen, deren Äquivalenzklassen die Fasern von f (als Punktmengen) sind.

Entsprechende Bemerkungen und Vereinbarungen gelten für Faserprodukte über endlich vielen holomorphen Abbildungen.

0.5 Unter dem *Rang* einer holomorphen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einem Punkt $x \in X$ verstehen wir immer die Zahl

$$\text{rg}_x f := \dim_x X - \dim_x f^{-1}(f(x)) ;$$

$\text{fmd } f := \min_{x \in X} \dim_x f^{-1}(f(x))$ heißt *Faserminimaldimension* von f , und

für irreduzible X ist die *Entartungsmenge* von f gleich

$$E_f := \{x \in X: \dim_x f^{-1}(f(x)) > \text{fmd } f\} .$$

Dann gilt (X irreduzibel!):

$$\begin{aligned} f \text{ hat konstanten Rang} &\iff f \text{ hat konstante Faserdimension} \iff \\ &\iff E_f = \emptyset \end{aligned}$$

und man sagt in diesem Fall: f ist *nicht entartet*.

Ist X nicht irreduzibel und $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ die Zerlegung von X in irreduzible Komponenten, so setzt man

$$E_f := \bigcup_{i \in I} E_f|_{X_i}.$$

Dabei vereinbaren wir, daß die Begriffe "irreduzibel, irreduzible Komponenten" usw. bei nichtreduzierten Räumen im Sinne von "die Reduktion ist irreduzibel, irreduzible Komponenten der Reduktion" usw. zu verstehen sind.

0.6 Für Punkte des $\mathbb{C}^n$ schreiben wir $z \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$,

und bezeichnen mit denselben Buchstaben auch die Koordinatenfunktionen. Dieser Mißbrauch hat eine lange Tradition und sollte weder Mißverständnisse nach sich ziehen noch auf Widerspruch stoßen.

Im $(n-1)$ -dimensionalen komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ werden die Punkte mit $[u] = (u_1 : \dots : u_n)$ notiert, wo $u_1 : \dots : u_n$ homogene Koordinaten sind, d.h. $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Dasselbe Symbol $[u]$ verwenden wir für die komplexe Gerade $\mathbb{C} \cdot u := \{\lambda u = \lambda(u_1, \dots, u_n) : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^n$.

§1. MEROMORPHE ABBILDUNGEN

In diesem Paragraphen sollen Definitionen und Eigenschaften meromorpher Abbildungen noch einmal zusammengefaßt werden für Leser, die nicht uneingeschränkt damit vertraut sind, damit später bequem hierauf verwiesen werden kann. Besonderer Wert wird auf die Beschreibung der meromorphen Komposition gelegt, und es wird die Bedeutung des sogenannten "RITTschen Lemmas" herausgestellt.

Literatur: [2], [3], [4], [17], [18].

1.1 Meromorphe Abbildungen stehen in engem Zusammenhang mit eigentlichen Modifikationsabbildungen, und zu deren Definition ist der Begriff "analytisch dünn" von Bedeutung. Wir beginnen also mit diesen Definitionen und einigen Erläuterungen dazu.

- (1) Eine abgeschlossene Teilmenge A eines komplexen Raumes X heißt *analytisch dünn*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset X$ die Beschränkungsabbildung $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \setminus A)$ injektiv ist. Daraus folgt: A ist nirgends dicht. Die Umkehrung gilt nur unter zusätzlichen Voraussetzungen:
- (2) Sei X reduziert. Dann ist eine analytische Teilmenge $A \subset X$ genau dann analytisch dünn, wenn sie nirgends dicht ist, d.h. keine irreduzible Komponente von X umfaßt.

Allgemein hat man die folgende Charakterisierung analytisch dünner Unterräume eines beliebigen komplexen Raumes:

- (3) Ein Unterraum eines komplexen Raumes X ist genau dann analytisch dünn, wenn die definierende Idealgarbe $J \subset \mathcal{O}_X$ in jedem Halm J_x ($x \in X$) einen Nichtnullteiler $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ enthält (siehe z.B. [4], 0.43).

Insbesondere sind also Hyperflächen (0.3) analytisch dünn.

- (4) Eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt (*eigentliche Modifikationsabbildung*, wenn (f eigentlich ist und) es eine analytisch dünne Teilmenge $B \subset Y$ gibt mit den Eigenschaften:
- (i) $f^{-1}(B) =: A \subset X$ ist analytisch dünn
 - (ii) $f|X \setminus A \rightarrow Y \setminus B$ ist biholomorph.

Setzt man

- (5) $S_f := \{y \in Y : f \text{ ist in keiner Umgebung von } f^{-1}(y) \text{ biholomorph}\}$,
so ist bekanntlich $S_f \subset Y$ analytisch (siehe z.B. [17], oder [18], S. 191, und für den nichtreduzierten Fall KRAUS, *Korrespondenzen und meromorphe Abbildungen*, Dissertation München 1971, S.70). Natürlich ist $S_f \subset B$ und S_f ist minimal bzgl. der Eigenschaft (4), (ii). Für jede eigentlich Modifikationsabbildung $f: X \rightarrow Y$ gilt:

- (6) Ist Y reduziert, so auch X ; ist $\overset{\text{zusätzlich}}{Y}$ $\checkmark$ irreduzibel, so auch X .

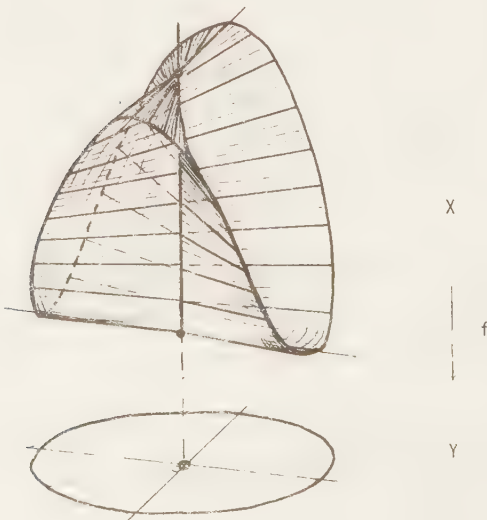
Zum Beweis der ersten Behauptung wendet man die Definition von "analytisch dünn" an auf $A \subset X$ mit den Schnitten der Garbe $N \subset \mathcal{O}_X$ der nilpotenten Elemente; die zweite Behauptung folgt aus $Y \setminus B \cong X \setminus A$ und $\overline{X \setminus A} = X$.

Allgemein entspricht bei reduziertem Y einer Zerlegung $Y = \cup Y_i$ in irreduzible Komponenten eine Zerlegung $X = \cup X_i$, und die Beschränkung von f auf jede irreduzible Komponente X_i liefert eine eigentliche Modifikationsabbildung $f|X_i \rightarrow Y_i$.

(7) Es stimmt jedoch nicht, daß bei einer eigentlichen Modifikationsabbildung $f: X \rightarrow Y$ aus der lokalen Irreduzibilität von Y auch die von X folgt. Ein Gegenbeispiel (das auch in anderem Zusammenhang gute Dienste tut, vgl. [4]) ist

$$X := \{(x,y;u:v) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1 : x^2 u - y^2 v = 0\}, \quad Y := \mathbb{C}^2 \quad \text{und} \\ f := \text{pr}_{\mathbb{C}^2}|X.$$

Mit $B = \{0\} \subset \mathbb{C}^2$, $A = \{0\} \times \mathbb{P}_1 \subset X$ ist f eigentliche Modifikationsabbildung; X ist in jedem Punkt von A lokal reduzibel (siehe Figur 1).



Figur 1

1.2 Wir werden nur mit meromorphen Abbildungen zwischen reduzierten komplexen Räumen zu tun haben. Für den Rest dieses Paragraphen seien also alle vorkommenden komplexen Räume als *reduziert* vorausgesetzt, falls nicht ausdrücklich anders angegeben.

So wie eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gegeben wird durch ihren Graphen $G_f \subset X \times Y$, und dort die erste Projektion einen Isomorphismus $G_f \cong X$ induziert, so wird eine *meromorphe Abbildung* $m: X \dashrightarrow Y$ gegeben durch einen Graphen $G_m \subset X \times Y$ vermöge der folgenden Bedingungen:

- (1) $G_m \subset X \times Y$ ist analytische Teilmenge
- (2) Die Beschränkung der ersten Projektion $G_m \rightarrow X$ ist eine eigentliche Modifikationsabbildung.

Wir bezeichnen die von den Projektionen induzierten holomorphen Abbildungen mit $\check{m}$, $\hat{m}$:



Nach (2) und 1.1 (5) gibt es eine analytisch dünne Menge $S_m := S_m^\vee \subset X$ mit den Eigenschaften:

- (3) $\check{m}|_{G_m \setminus \check{m}^{-1}(S_m)} \longrightarrow X \setminus S_m$ ist biholomorph, d.h. $m|_{X \setminus S_m} \rightarrow Y$ ist holomorph
- (4) $S_m = \{x \in X: \text{Es gibt keine Umgebung } U \text{ von } x, \text{ so daß } m|_U \rightarrow Y \text{ holomorph ist}\}$

S_m heißt *Singularitätenmenge* von m .

Eine meromorphe Abbildung ist also i. allg. keine "Abbildung" im herkömmlichen Sinn; es können *Unbestimmtheitspunkte* auftreten. Dies sind Punkte $x \in X$, für die das Bild $m(x) := \hat{m}(\check{m}^{-1}(x))$ mehr als einen Punkt enthält. $m(x)$ kann auch höherdimensional sein, es ist jedoch stets kompakt und analytisch in Y . Ist X normal, so gilt sogar: $x \in S_m \iff \dim m(x) \geq 1$ (siehe z.B. [17]).

Ist auch $\hat{m}$ eine eigentliche Modifikationsabbildung, so definiert das Bild von G_m unter der Symmetrieabbildung $X \times Y \rightarrow Y \times X$ eine meromorphe Abbildung $m^{-1}: Y \rightarrow X$ und m heißt *bimeromorph*. So ist z.B. eine eigentliche Modifikationsabbildung bimeromorph.

Die *Fasern* einer allgemeinen meromorphen Abbildung $m: X \rightarrow Y$ sind definiert als

$$(5) \quad m^{-1}(y) := \check{m}(\hat{m}^{-1}(y)) ;$$

dies sind analytische Mengen in X . Es ist

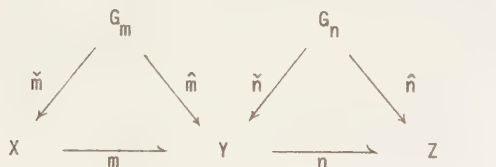
$$(6) \quad m^{-1}(y) = \{x \in X : (x,y) \in G_m\} \cong (X \times \{y\}) \cap G_m = \hat{m}^{-1}(y) ,$$

also gilt: Die meromorphe Abbildung m hat konstante Faserdimension genau dann, wenn die holomorphe Abbildung $\hat{m}: G_m \rightarrow Y$ konstante Faserdimension hat.

Urbilder analytischer Mengen unter einer meromorphen Abbildung werden analog zu (5) und (6) definiert; sie sind wieder analytisch.

1.3 Von Bedeutung für unser Vorhaben ist der Begriff der *meromorphen Komposition*:

Seien $m: X \rightarrow Y$, $n: Y \rightarrow Z$ zwei meromorphe Abbildungen, gegeben durch



Die naheliegende Definition

$$(1) \quad n \circ m(x) := n(m(x)) = \hat{n}(\check{n}^{-1}(\hat{m}(\check{m}^{-1}(x))))$$

führt auf einen Graphen $G_{n \circ m} \subset Z \times X$, den man erhält als Bild des Faserprodukts $G_m \times_Y G_n \subset G_m \times G_n \subset X \times Y \times Y \times Z$ unter der Projektion $X \times Y \times Y \times Z \rightarrow X \times Z$.

Man überlegt sich leicht ($G_m \rightarrow X$ ist eigentlich!), daß $G_{n \circ m} \subset X \times Z$ analytisch und $G_{n \circ m} \rightarrow X$ eigentlich ist. Es kann nur Folgendes passieren:

- $m^{-1}(S_n)$ ist nicht analytisch dünn. Dann läßt sich im allgemeinen eine meromorphe Komposition nicht sinnvoll definieren, und wir wollen diesen Fall ausschließen.
- $m^{-1}(S_n)$ ist analytisch dünn, aber $G_{n \circ m} \cap (T \times Z)$ (mit $T := S_m \cup m^{-1}(S_n)$) ist möglicherweise nicht analytisch dünn in $G_{n \circ m}$.

Nun ist im letzten Fall $G_{n \circ m} \cap (T \times Z)$ jedenfalls analytisch in $G_{n \circ m}$; ist es nicht analytisch dünn, so enthält es also irredu-

zible Komponenten von $G_{n \circ m}$ (vgl. 1.1 (2)). Man setzt

- (2) $G_{n \Delta m} :=$ Vereinigung aller irreduziblen Komponenten von $G_{n \circ m}$, die nicht in $T \times Z$ enthalten sind.

Dann wird $G_{n \Delta m} \cap (T \times Z)$ analytisch dünn, $G_{n \Delta m} \rightarrow X$ ist eigentliche Modifikationsabbildung und $G_{n \Delta m}$ ist Graph einer meromorphen Abbildung $n \Delta m: X \rightarrow Z$, der *meromorphen Komposition* von m und n .

Beispiel:

Ist $m: X \rightarrow Y$ bimeromorph und hat m^{-1} Unbestimmtheitsstellen, so ist $m^{-1} \circ m$ verschieden von id_X und keine meromorphe Abbildung; dagegen ist $m^{-1} \Delta m = \text{id}_X$.

Bevor wir Eigenschaften und Regeln für die meromorphe Komposition angeben, soll (2) genauer beschrieben werden. Dazu erläutern wir das sogenannte "RITTSche Lemma", und zwar gleich in einer (später nützlichen) allgemeineren Form, als es an dieser Stelle nötig wäre.

1.4 (RITTSches Lemma). Sei X ein (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum, $Y \subset X$ ein Unterraum und $A \subset X$ eine analytische Teilmenge. Dann gibt es einen Unterraum $Y' \subset X$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $Y' \cap (X \setminus A) = Y \cap (X \setminus A)$, d.h. außerhalb A stimmt Y' mit Y überein.
- (ii) Y' ist minimal bzgl. (i), d.h. ist $Y'' \subset X$ ein Unterraum mit $Y'' \cap (X \setminus A) = Y \cap (X \setminus A)$, so ist Y' Unterraum von Y'' .

(iii) $Y' \cap A$ ist analytisch dünn in Y' und es gilt:

$$Y = Y' \iff Y \cap A \text{ ist analytisch dünn in } Y;$$

(iv) topologisch gesehen ist $Y' = \overline{Y \setminus A}$ (abgeschlossene Hülle in X).

Wir werden im Folgenden die Bezeichnung $\overline{Y \setminus A}$ immer im Sinne von (iv) für den eindeutig bestimmten Unterraum Y' verwenden.

Zum Beweis sei auf [4, 0.44] verwiesen; wir geben nur einige wesentliche Schritte an:

Ist $J \subset \mathcal{O}_X$ die den Unterraum Y definierende Idealgarbe, so wird Y' definiert durch die sogenannte *Lückengarbe* $J[A] \subset \mathcal{O}_X$; für offene $U \subset X$ ist

$$(1) \quad J[A](U) := \{\varphi \in \mathcal{O}_X(U) : \varphi|_{U \setminus A} \in J(U \setminus A)\}.$$

Die Idealgarbe $J[A] \subset \mathcal{O}_X$ ist kohärent, da sie sich darstellen läßt als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von kohärenten Idealgarben in $\mathcal{O}_X$ (siehe [4, 0.42]):

$$(2) \quad J[A] = \bigcup_{k=0}^{\infty} J \cdot I^k;$$

hier ist $I \subset \mathcal{O}_X$ eine $A \subset X$ definierende kohärente Idealgarbe und

$$J \cdot I^k = \text{Ker}(\mathcal{O}_X \rightarrow \text{Hom}(I^k, \mathcal{O}_X/J))$$

$$\alpha \mapsto (\beta \mapsto \alpha\beta \bmod J),$$

$$\text{d.h. für } x \in X : (J \cdot I^k)_x = \{\alpha_x \in \mathcal{O}_{X,x} : \alpha_x \cdot I_x^k \subset J_x\}.$$

Die Eigenschaften (i) und (ii) folgen unmittelbar aus (1); zusammen mit der Definition in 1.1 folgt auch schnell (iii).

Machen wir uns noch (iv) klar: Y' ist abgeschlossen, also gilt

$\overline{Y \setminus A} \subset Y'$. Umgekehrt gibt es zu $x \in A \setminus \overline{Y \setminus A}$ eine Umgebung U von x mit $U \cap (Y \setminus A) = \emptyset$. Also ist dort (vgl. (2))

$$J[A]_x = O_{X,x} \quad \text{und} \quad x \notin Y'.$$

1.5 Wenden wir nun 1.4 auf 1.3 an. Die Bezeichnungen sind folgendermaßen einander zuzuordnen:

<u>in 1.4 :</u>	<u>in 1.3 :</u>
X	$X \times Z$
Y	$G_{n \circ m}$
A	$T \times Z$
$Y' = \overline{Y \setminus A}$	$G_{n \Delta m} = \overline{G_{n \circ m} \setminus T \times Z}$

Das Ergebnis der letzten Zeile erschließt sich unmittelbar aus (iii) und der Bemerkung vor 1.3(2), da in 1.3 nur reduzierte komplexe Strukturen vorkommen.

Damit haben wir eine rein topologische Beschreibung der meromorphen Komposition $n \Delta m: X \rightarrow Z$ gewonnen; es gilt (T wie oben):

$$(1) \quad G_{n \Delta m} = \{(x, z) \in G_{n \circ m} : \exists \text{ Folge } (x_v, z_v) \in G_{n \circ m} \setminus T \times Z, (x_v, z_v) \rightarrow (x, z)\};$$

wegen $G_{n \circ m} = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in G_m, (y, z) \in G_n\}$ können wir (1) auch schreiben in der Form

$$(2) \quad (n \circ m)(x) = \{z \in Z : \exists \text{ Folge } x_\nu \in X \setminus T, \quad x_\nu \rightarrow x \text{ mit} \\ n(m(x_\nu)) \rightarrow z \} .$$

Dabei sind die $m(x_\nu) \in Y \setminus S_n$, also die $n(m(x_\nu))$ wohldefinierte Punkte.

1.6 Zum Abschluß dieses Paragraphen stellen wir noch Bedingungen für die Existenz der meromorphen Komposition sowie einige Eigenschaften zusammen.

Wie in 1.3 seien $m: X \rightarrow Y$, $n: Y \rightarrow Z$ zwei meromorphe Abbildungen. Die meromorphe Komposition $n \circ m: X \rightarrow Z$ existiert sicher dann, wenn $m^{-1}(S_n) \subset X$ analytisch dünn ist. Dazu ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend:

- (1) $S_n = \emptyset$, d.h. $n: Y \rightarrow Z$ ist eine holomorphe Abbildung (in diesem Fall gilt darüberhinaus $n \circ m = n \circ m$).
- (2) m hat die Eigenschaft, daß Urbilder analytisch dünner Mengen analytisch dünn sind; dies ist z.B. der Fall, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
 - (i) m ist bimeromorph
 - (ii) X ist irreduzibel und m ist surjektiv
 - (iii) die Beschränkung von m auf jede irreduzible Komponente von X ist surjektiv auf eine irreduzible Komponente von Y .

Ist $r: Z \rightarrow W$ eine weitere meromorphe Abbildung, so stellt sich die Frage nach den meromorphen Kompositionen $r \circ (n \circ m)$ und $(r \circ n) \circ m$. Es gilt:

- (3) Sind $n^{-1}(S_r) \subset Y$ und $m^{-1}(S_n \cup n^{-1}(S_r)) \subset X$ analytisch dünn, so existieren die meromorphen Kompositionen $r \Delta (n \Delta m)$ und $(r \Delta n) \Delta m$ und stimmen überein (so daß die Klammern weggelassen werden können).

Eine entsprechende Aussage gilt natürlich für Kompositionen endlich vieler meromorpher Abbildungen. In §3 wird der folgende Spezialfall zu beachten sein:

- (4) Die meromorphe Komposition endlich vieler meromorpher Abbildungen existiert immer, wenn alle beteiligten Abbildungen bimeromorph sind.

S2. MONOIDALE TRANSFORMATIONEN

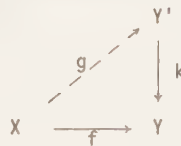
Zuerst bringen wir die allgemeine Definition zusammen mit einigen unmittelbaren Folgerungen; als Spezialfall wird dann der σ -Prozeß mit einigen seiner Eigenschaften behandelt und schließlich folgt die Konstruktion im allgemeinen Fall. Die Erläuterung einer anderen Konstruktionsmöglichkeit sowie einige Bemerkungen über die eingesetzte Hyperfläche schließen den Paragraphen ab.

Literatur: [2], [4], [7], [12], [18].

2.1 Sei Y ein komplexer Raum, $D \subset Y$ ein Unterraum.

Eine holomorphe Abbildung $k: Y' \rightarrow Y$ heißt *monoidale Transformation von Y mit Zentrum D* (oder auch *σ -Modifikation bezüglich D*), wenn gilt:

- (i) $k^{-1}(D) \subset Y'$ ist Hyperfläche
- (ii) Zu jeder holomorphen Abbildung $f: X \rightarrow Y$, bei der $f^{-1}(D)$ Hyperfläche in X ist, gibt es genau eine holomorphe Abbildung $g: X \rightarrow Y'$ mit $k \circ g = f$.



In diesem Zusammenhang sind folgende Sprechweisen üblich:

Y' entsteht aus Y durch "Aufblasen" von D zu einer Hyperfläche; Y' ist σ -Modifikation von Y .

Die Bedingung (ii) liefert sofort, daß Y' (wenn es existiert) bis auf Isomorphismus (in naheliegendem Sinn) eindeutig bestimmt ist.

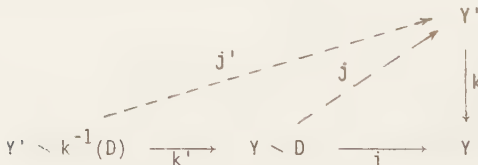
In zwei Extremfällen kann man Y' sofort angeben:

- a) D ist bereits Hyperfläche (insbesondere bei $D = \emptyset$); dann ist $Y' = Y$ und $k = \text{id}_Y$;
- b) es ist $D = Y$; dann ist $Y' = \emptyset$.

Weiterhin lassen sich aus der Definition bereits einige wichtige Eigenschaften der monoidalen Transformation herleiten:

(1) $k|_{Y' \setminus k^{-1}(D)} : Y' \setminus k^{-1}(D) \rightarrow Y \setminus D$ ist biholomorph.

Beweis: Man betrachte das folgende Diagramm, wo $i: Y \setminus D \rightarrow Y$ die Inklusion und $k': Y' \setminus k^{-1}(D) \rightarrow Y \setminus D$ die Beschränkung von k ist.



Da $i^{-1}(D) = \emptyset$ Hyperfläche ist, gibt es genau ein $j: Y \setminus D \rightarrow Y'$ mit $k \circ j = i$. Auch $(i \circ k')^{-1}(D) = \emptyset$ ist Hyperfläche, also gibt es genau ein $j' = j \circ k'$ mit $k \circ j' = i \circ k'$. Für j' kommt aber nur die Inklusion in Frage, denn die Inklusion erfüllt die Gleichung $k \circ j' = i \circ k'$.

Fassen wir zusammen: $j \circ k'$ ist die Inklusion $Y' \setminus k^{-1}(D) \xrightarrow{j'} Y'$,

$k \circ j$ ist die Inklusion $Y \setminus D \longrightarrow Y$. Wegen $j(Y \setminus D) \subset Y' \setminus k^{-1}(D)$ können wir j ersetzen durch $j'': Y \setminus D \longrightarrow Y' \setminus k^{-1}(D)$ mit $j' \circ j'' = j$, und es folgt: $k' \circ j'' = \text{id}_{Y \setminus D}$, $j'' \circ k' = \text{id}_{Y' \setminus D'}$ ($D' := k^{-1}(D)$). Also ist k' biholomorph. $\square$

(2) Ist $D \subset Y$ analytisch dünn, so ist k Modifikationsabbildung. (k ist sogar *eigentliche* Modifikationsabbildung, doch stellt sich dies erst im Anschluß an die Konstruktion heraus).

Beweis: Die Bedingungen von 1.1 (4) sind mit $B := D$, $A := k^{-1}(D)$ und mit obigem (1) erfüllt, da auch die Hyperfläche $k^{-1}(D)$ analytisch dünn ist. $\square$

(3) Ist Y reduziert, so auch Y' .

Dies beweist man wie den ersten Teil von 1.1 (6); dabei braucht D nicht analytisch dünn zu sein. $\square$

2.2 Beim σ -Prozeß ("Aufblasen eines Punktes") wird ein Punkt des $\mathbb{C}^n$ (oder einer n -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit) ersetzt durch $\mathbb{P}_{n-1}$ (die Gesamtheit aller "Richtungen" im $\mathbb{C}^n$ in diesem Punkt), so daß wieder eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit entsteht. Dies ist der Urtyp einer monoidalen Transforma-

mation, von dem sich die allgemeine Konstruktion ableitet. Da dieser Spezialfall im Folgenden eine große Rolle spielen wird, erscheint eine ausführlichere Darstellung vernünftig, auch wenn leicht auf Literatur verwiesen werden könnte.

SATZ. Es gibt eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit Z und eine eigentliche holomorphe Abbildung $\sigma: Z \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\sigma^{-1}(0)$ ist isomorph zum $(n-1)$ -dimensionalen komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}_{n-1}$
- (ii) σ ist monoidale Transformation von $\mathbb{C}^n$ mit Zentrum $\{0\}$.

Beweis: Sei

$$(1) \quad Z := \{(z, [u]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1} : z_i u_j = z_j u_i, \forall i, j=1, \dots, n\}$$

$$\text{und } \sigma := \text{pr}_{\mathbb{C}^n}|_Z.$$

Z ist Mannigfaltigkeit:

Es genügt zu zeigen: Z ist in der Umgebung eines Punktes $(z, [u]) \in Z$ Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$. Dabei können wir o.B.d.A. $u_n \neq 0$ voraussetzen.

Dann haben wir die offene Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1} &\subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1} \\ (z_1, \dots, z_n, v_1, \dots, v_{n-1}) &\rightarrow (z_1, \dots, z_n; v_1 : \dots : v_{n-1} : 1), \end{aligned}$$

und $Z \cap (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1})$ wird beschrieben durch die Gleichungen

$$(2) \quad z_i = z_n \cdot v_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

(beim Vergleich mit (1) ist $v_i = u_i/u_n$ zu beachten).

Die Abbildung

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n-1} \\ (z, v) & \longmapsto & (z_i - z_n v_i)_{i=1, \dots, n-1} \end{array}$$

hat sichtlich überall maximalen Rang $n-1$, also ist das Urbild von $\{0\} \times \mathbb{C}^{n-1}$, nämlich $Z \cap (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1})$, Untermannigfaltigkeit. Weiterhin sieht man daraus:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & Z \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1} \\ (v_1, \dots, v_{n-1}, z_n) & \longmapsto & (z_n v_1, \dots, z_n v_{n-1}, z_n; v_1 : \dots : v_{n-1} : 1) \end{array}$$

ist eine biholomorphe Abbildung auf $Z \cap (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1})$, d.h.

$v_1, \dots, v_{n-1}, z_n$ sind lokale Koordinaten auf Z in der Umgebung eines Punktes $(z, [u])$ mit $u_n \neq 0$.

Die Eigenschaft (i) entnimmt man unmittelbar aus (1); es bleibt die universelle Eigenschaft der monoidalen Transformation zu zeigen (siehe 2.1 (ii)).

Sei also $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Abbildung, gegeben durch $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann ist $f^{-1}(0) \subset X$ definiert durch die Ideal-

garbe $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mathcal{O}_X$. Nach Voraussetzung wird sie lokal (etwa über $U \subset X$) von einem Nichtnullteiler $\chi \in \mathcal{O}_X(U)$ erzeugt, also ist $\varphi_i|_U = \chi \psi_i$ mit $\psi_i \in \mathcal{O}_X(U)$, und mindestens ein ψ_i ist invertierbar in $\mathcal{O}_X(U)$ (für genügend kleines U), d.h. $\psi_i(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Nun wird durch

$$x \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x); \psi_1(x) : \dots : \psi_n(x))$$

eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $U \rightarrow Z$ definiert (die Eindeutigkeit folgt daraus, daß χ Nichtnullteiler ist!), und durch "Verkleben" über alle derartigen U erhält man eine holomorphe Abbildung $g: X \rightarrow Z$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Schließlich ist σ eigentlich, denn es ist die Beschränkung der eigentlichen Abbildung $\text{pr}_{\mathbb{C}^n}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ auf den abgeschlossenen Teil $Z \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$.

Die nach 2.1 (1) existierende holomorphe Umkehrabbildung zu $\sigma|_{Z \setminus \sigma^{-1}(0)}$ können wir hier explizit angeben:

$$(5) \quad \sigma^{-1}(z) = \{z, [z]\} \quad \text{falls } z \neq 0;$$

in den lokalen Koordinaten von (4) wird $\sigma^{-1}|\mathbb{C}^n \setminus (\mathbb{C}^{n-1} \times \{0\})$ beschrieben durch

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, z_n \right).$$

2.3 BEMERKUNGEN

- (1) $\sigma: Z \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist eigentliche Modifikationsabbildung,
 $Z \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1}$ also Graph einer meromorphen Abbildung
 $\ell: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ mit $S_\ell = \{0\}$ und $\ell(0) = \mathbb{P}_{n-1}$. Für
 $z \neq 0$ ist $\ell(z) = [z]$.
- (2) σ ist bimeromorph; die meromorphe Abbildung $\sigma^{-1}: \mathbb{C}^n \rightarrow Z$
kann man als "meromorphe Verbindung" $\sigma^{-1} = (\text{id}_{\mathbb{C}^n}, \ell)$ dar-
stellen (siehe z.B. [17]).
- (3) Die zweite Projektion $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ läßt $Z \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$
als kanonisches Geradenbündel über dem $\mathbb{P}_{n-1}$ erscheinen:
Jedem $[u] \in \mathbb{P}_{n-1}$ wird die komplexe Gerade $[u] \subset \mathbb{C}^n$ an-
geheftet. $\sigma^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}_{n-1}$ ist gerade der Nullschnitt
dieses Geradenbündels.
- (4) Ist M eine n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und
 $P \in M$, so erhält man die monoidale Transformation von M
mit Zentrum $\{P\}$ folgendermaßen: Sei $U \subset M$ eine "Karten-
umgebung" von P und $\varphi: U \xrightarrow{\sim} G$ biholomorph mit $\varphi(P) = 0 \in$
 $G \subset \mathbb{C}^n$. Dann ist $G' := Z \cap \sigma^{-1}(G)$ die monoidale Trans-
formation von G mit Zentrum $\{0\}$ und (vermöge φ) auch
von U mit Zentrum $\{P\}$. Man erhält M' durch "Verkleben"
von $M \setminus \{P\}$ mit G' längs $U \setminus \{P\} \cong G' \setminus \sigma^{-1}(0)$; die
Bedingungen 2.1 (i) und (ii) sind für M' (fast) unmittelbar
einzusehen.

- (5) Ist $A \subset Z$ eine 1-dimensionale lokal-analytische Menge mit $A \cap (\{0\} \times \mathbb{P}_{n-1}) = \{(0, [u])\}$, so ist $\sigma|_A$ diskret in $(0, [u])$, bildet also eine Umgebung von $(0, [u])$ in A eigentlich in eine Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^n$ ab (siehe zum Beispiel

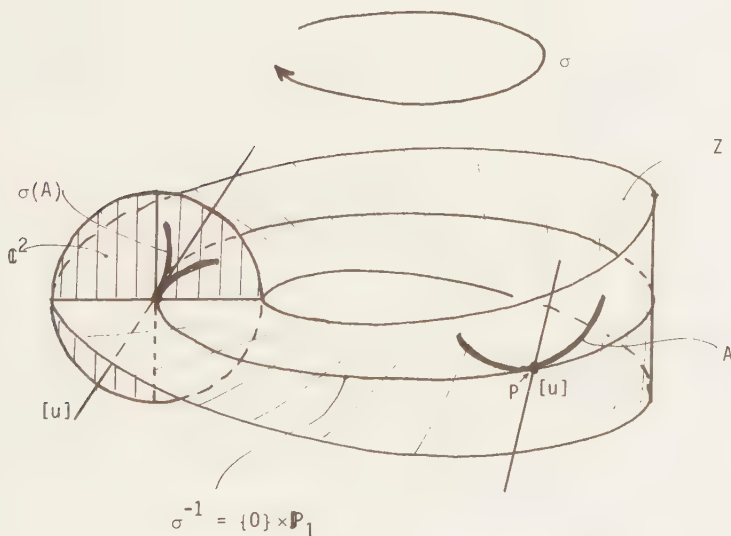
[15], "Komplexe Analysis", S. 80/81, (7.5)). Damit ist $B := \sigma(A) \subset \mathbb{C}^n$ lokalanalytisch, $0 \in B$ und (wegen $A \setminus \{(0, [u])\} \simeq B \setminus \{0\}$) $\dim B = 1$. Behauptung: Der Tangentenkegel $C(B, 0)$ (im Sinne von [18, S. 210, Def. 1G]) besteht nur aus der Geraden $[u] \subset \mathbb{C}^n$. Beweis: $C(B, 0)$ besteht aus den Grenzlagen der Geraden durch 0 und $z^\vee \in B$ im $\mathbb{C}^n$ für $z^\vee \rightarrow 0$, $z^\vee \neq 0$. Diese Grenzlagen entsprechen den Limites der Folgen $[z^\vee]$ in $\mathbb{P}_{n-1}$. Nach den Voraussetzungen über A kommt dafür wegen $(z^\vee, [z^\vee]) \in A \setminus \{(0, [u])\}$ nur $[u]$ in Frage.

- (6) Ist umgekehrt $B \subset \mathbb{C}^n$ eine 1-dimensionale lokal-analytische Menge mit $C(B, 0) = [u]$, so ist $A := \overline{\sigma^{-1}(B \setminus \{0\})}$ (vgl. 1.4) lokalanalytisch in Z und $A \cap \sigma^{-1}(0) = \{(0, [u])\}$ (denn jede Punktfolge in $\sigma^{-1}(B \setminus \{0\})$ ist von der Gestalt $(z^\vee, [z^\vee])$ und nach Voraussetzung über $C(B, 0)$ gilt: $z^\vee \rightarrow 0 \Rightarrow [z^\vee] \rightarrow [u]$).

Wir fassen (5) und (6) zusammen in dem folgenden Satz:

SATZ: Der σ -Prozeß $\sigma: Z \rightarrow \mathbb{C}^n$ (Bezeichnungen wie in 2.2) induziert für jeden Punkt $P := (0, [u]) \in \sigma^{-1}(0)$ eine bijektive Abbildung zwischen den folgenden Mengen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1-dimensionale analytische Mengen-} \\ \text{keime in } P \in Z, \text{ die einen lokal-} \\ \text{analytischen Repräsentanten } A \text{ mit} \\ A \cap \sigma^{-1}(0) = \{P\} \text{ besitzen} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{1-dimensionale analytische} \\ \text{Mengenkeime in } 0 \in \mathbb{C}^n, \text{ deren} \\ \text{Tangentenkegel in } 0 \text{ nur aus} \\ \text{der Geraden } [u] \subset \mathbb{C}^n \text{ besteht} \end{array} \right\}.$$



Figur 2

2.4 Wir kommen nun zur Konstruktion der monoidalen Transformation im Spezialfall, daß das Zentrum $D \subset Y$ dargestellt werden kann als Faser einer holomorphen Abbildung in den $\mathbb{C}^n$:

SATZ: Sei Y ein komplexer Raum, $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n): Y \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Abbildung und $D := a^{-1}(0)$. Dann existiert die monoidale Transformation von Y mit Zentrum D , und $k': Y' \rightarrow Y$ ist eigentlich.

Beweis: Wir betrachten das kartesische Quadrat

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} Y^* & \xrightarrow{q} & Z \\ p \downarrow & & \downarrow \sigma \\ D = a^{-1}(0) \subset Y & \xrightarrow{a} & \mathbb{C}^n \end{array} \quad (Y^* := Y \times_{\mathbb{C}^n} Z)$$

wo $\sigma: Z \rightarrow \mathbb{C}^n$ der σ -Prozeß von 2.2 ist.

Y erfüllt bereits die universelle Eigenschaft 2.1 (ii):

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und $f^{-1}(D) = (a \circ f)^{-1}(0)$ Hyperfläche. Da σ monoidale Transformation ist, gibt es genau eine holomorphe Abbildung $h: X \rightarrow Z$ mit $h = a \circ f$, und wegen der universellen Eigenschaft des Faserprodukts also genau ein $g': X \rightarrow Y \times_{\mathbb{C}^n} Z$ mit $f = p \circ g'$. Es ist nur möglich, daß $p^{-1}(D)$ keine Hyperfläche ist.

Wir setzen nun

$$(2) \quad Y' := \overline{Y^* \setminus p^{-1}(D)} \subset Y^*, \quad k := p|_{Y'}$$

und behaupten: k ist die monoidale Transformation von Y mit Zentrum D .

Zunächst ist zu zeigen, daß sich das obige g' über Y' faktoriert:

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g'} & Y^* & \xrightarrow{q} & Z \\ & \searrow g & \subset & & \\ & Y' & & & \\ & \searrow k & \downarrow p & & \downarrow \sigma \\ & Y & \xrightarrow{a} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

(Additional arrows in the diagram: $h: X \rightarrow Z$, $f: X \rightarrow Y$, and a curved arrow from Y' to Y .)

Sei $J \subset \mathcal{O}_{Y^*}$ die Idealgarbe von $p^{-1}(D) \subset Y^*$. Dann wird $Y' \subset Y^*$ definiert durch die Idealgarbe $I \subset \mathcal{O}_{Y^*}$ mit (vgl. 1.4 (1)):

$$I(V) = \{ \beta \in \mathcal{O}_{Y^*} : \beta|_V \cap p^{-1}(D) = 0 \} \quad \text{für offene } V \subset Y^* .$$

Es ist zu zeigen: I wird unter dem zu g' gehörenden Garbenmorphismus $*g': \mathcal{O}_{Y^*} \rightarrow g'_* \mathcal{O}_X$ in das Nullideal abgebildet.

Aber $g'^{-1}(p^{-1}(D)) = f^{-1}(D)$ ist Hyperfläche, also analytisch dünn in X , und $*g'(\beta) \in (g'_* \mathcal{O}_X)(V) \simeq \mathcal{O}_X(g'^{-1}(V))$ hat die Eigenschaft: $g'_*(\beta)|_{g'^{-1}(V) \setminus f^{-1}(D)} = 0$. Also folgt $*g'(\beta) = 0$.

Schließlich ist nachzuweisen, daß $k^{-1}(D) = Y' \cap p^{-1}(D)$ Hyperfläche in Y' ist. Dazu beobachten wir zuerst, daß $p^{-1}(D) = q^{-1}(\sigma^{-1}(0))$ durch eine Hauptidealgarbe definiert wird. Lokal ist nämlich $\sigma^{-1}(0)$ von der Gestalt $\chi^{-1}(0)$ mit einem Nichtnullteiler $\chi \in \mathcal{O}_Z(U)$ ($U \subset Z$ offen), und in $q^{-1}(U) \subset Y^*$ wird also $p^{-1}(D)$ definiert durch $\chi \circ q|_{\dots} \in \mathcal{O}_{Y^*}(q^{-1}(U))$. Nun ergibt sich die Behauptung aus dem folgenden Lemma, das sich an 1.4 anschließt:

LEMMA: Sei X ein komplexer Raum und $Y \subset X$ ein Unterraum, der durch eine Hauptidealgarbe definiert wird. Ist dann $X' := \overline{X \setminus Y}$ und $Y' := Y \cap X'$, so ist Y' Hyperfläche in X' .

Beweis: $X' \subset X$ wird definiert durch die kohärente Idealgarbe $J := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ann}(I^k) \subset \mathcal{O}_X$, wo $I \subset \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe zu Y ist, und $\text{Ann}(I^k)$ die Annulatorgarbe von I^k in $\mathcal{O}_X$ (vgl. 1.4 (2), angewendet auf diesen Spezialfall). Y' wird dann in X' definiert durch $I/J \subset \mathcal{O}_{X'}/J \simeq \mathcal{O}_{X'}$. Ist $x \in \mathcal{O}_{X'}(U)$ eine lokale Erzeugende von $I(U)$, so ist $\underline{x} := x \bmod J$ Nichtnullteiler in $\mathcal{O}_{X'}(U)$, denn jedes $a \in \mathcal{O}_{X'}(U)$ mit $a_x \in J(U)$ liegt schon selbst in $J(U)$.

Schließlich ist k eigentlich, denn mit σ ist im kartesischen Quadrat (1) auch p eigentlich und als Beschränkung von p auf einen abgeschlossenen Teil auch k .

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

2.5 Nun ergibt sich schnell die Existenz der monoidalen Transformation im allgemeinen Fall:

SATZ: Zu jedem komplexen Raum Y und jedem Unterraum $D \subset Y$ existiert die monoidale Transformation $k: Y' \rightarrow Y$ von Y mit Zentrum D , und k ist eigentlich.

Beweis: Wir überdecken Y durch offene Mengen U_ℓ ($\ell \in I$), so daß $U_\ell \cap D$ von der Gestalt $a_\ell^{-1}(0)$ ist mit holomorphen Abbildungen $a_\ell: U_\ell \rightarrow \mathbb{C}^{n_\ell}$. Nach 2.4 konstruieren wir die monoidalen

Transformationen $k_\ell: U'_\ell \rightarrow U_\ell$ mit Zentrum $U_\ell \cap D$. Die universelle Eigenschaft liefert eindeutig bestimmte Isomorphismen $k_\ell^{-1}(U_\ell \cap U_\lambda) \xrightarrow{k_{\ell\lambda}} k_\lambda^{-1}(U_\lambda \cap U_\ell)$ mit $k_{\ell\lambda} \circ k_{\lambda\kappa} = k_{\ell\kappa}$ für alle $\ell, \lambda, \kappa \in I$. Also lassen sich die U'_ℓ längs dieser Isomorphismen verkleben zu Y' und k_ℓ zu $k: Y' \rightarrow Y$. Die Eigenschaften 2.1 (i) und (ii) sind praktisch trivial zu verifizieren. Ebenso folgt unmittelbar aus der entsprechenden Aussage in 2.4, daß k eigentlich ist.

2.6 Im Falle, daß Y reduziert und $D \subset Y$ analytisch dünn ist, können wir Y' noch anders beschreiben:

Wie aus 2.4 (2) und 1.5 hervorgeht, ist dann nämlich $Y' \subset Y \times Z$ gerade der Graph der meromorphen Komposition $\sigma^{-1} \Delta a$ (es genügt, wie in 2.4 den Fall $D = a^{-1}(0)$ zu betrachten).

Zur expliziteren Beschreibung präzisieren und vereinfachen wir die Bezeichnungen: Für Punkte $(0, [u]) \in \sigma^{-1}(0) \subset Z$ schreiben wir einfach $[u] \in Z$; Punkte $y' \in k^{-1}(D) = q^{-1}(\sigma^{-1}(0)) \cap Y'$ geben wir in der Form $y' = (y, [u])$ an mit $y = k(y')$ und $[u] = q(y')$ (hier sei an $Y' \subset Y \times_{\mathbb{C}} Z \subset Y \times Z$ erinnert).

Damit lesen wir aus 1.5 (2) ab: Für jedes $y \in D$ ist

$$(1) \quad k^{-1}(y) = \{(y, [u]) \in Y': \exists \text{ Folge } y_\nu \in Y \setminus D, y_\nu \rightarrow y \text{ mit } \sigma^{-1}(a(y_\nu)) \rightarrow [u]\}.$$

Ist z.B. Y eine Mannigfaltigkeit und $D \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit und betrachten wir die Situation lokal, so können wir an-

nehmen, $Y = \mathbb{C}^m$, $D = \{0\} \times \mathbb{C}^{m-n}$ und $a = \text{pr}_{\mathbb{C}^n}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Für jedes $y \in D$ entsprechen dann die Punkte von $k^{-1}(y)$ genau den Richtungen im $\mathbb{C}^n$ in 0 (d.h. $k^{-1}(y) \simeq \mathbb{P}_{n-1}$) und wir können die Punkte von $k^{-1}(y)$ auffassen als "Richtungen der Normalen an D in Y ".

Diese geometrische Interpretation der Punkte, die anstelle von D eingesetzt werden, um Y' zu erhalten, stößt auf Schwierigkeiten, wenn D und Y nicht singularitätenfrei sind. Wir werden darauf zurückkommen (siehe 2.8).

2.7 Es ist wissenswert (und in manchen Situationen recht nützlich), daß man die monoidale Transformation auf eine andere direktere (aber abstraktere) Weise konstruieren kann im Rahmen des "Specan-Formalismus". Für den letzteren sei auf [14] verwiesen, doch ist dieser Abschnitt so abgefaßt, daß er ohne Rückgriff auf diese Quelle lesbar sein sollte. Die folgenden Ausführungen wurden angeregt durch eine Vorlesung von Ch. HOUZEL in Nizza, 1971/72; sie beschreiben die Übertragung einiger EGA-Konstruktionen (siehe [7]) auf den komplex-analytischen Fall.

2.7.1 Sei Y ein komplexer Raum und A eine $\mathcal{O}_Y$ -Algebrengarbe von endlicher Darstellung, d.h. lokal ist A von der Form

$$A|_U \cong \mathcal{O}_{Y|U}[T_1, \dots, T_n] / (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \quad \text{mit} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{O}_Y(U)[T_1, \dots, T_n]$$

($(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ bezeichnet die von den φ_i erzeugte Idealgarbe in $\mathcal{O}_{Y|U}[T_1, \dots, T_n]$). Die $\varphi_i \in \mathcal{O}_Y(U)[T_1, \dots, T_n]$ lassen sich auch als Schnitte von $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{C}^n}(U \times \mathbb{C}^n)$ auffassen.

Dann wird das *analytische Spektrum* von A , in Zeichen: $X = \text{Specan } A$, versehen mit einer holomorphen Abbildung $p: X \rightarrow Y$, auf die folgende Weise konstruiert:

Über $U \subset Y$ (offen) ist $\text{Specan } A|_U = X|_U \subset U \times \mathbb{C}^n$ definiert durch die von $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{O}_{Y \times \mathbb{C}^n}(U \times \mathbb{C}^n)$ erzeugte Idealgarbe in $\mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^n}$ und $p|_{\text{Specan } A|_U} \rightarrow U$ ist die Beschränkung der Projektion $U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$ auf $X|_U$. Für $\text{Specan } A|_U$ weist man die Gültigkeit der folgenden universellen Eigenschaft 2.7.2 nach, so daß sich die $X|_U$ wegen der daraus folgenden Eindeutigkeit der Konstruktion (bis auf Isomorphie) verkleben lassen zu einem komplexen Raum X über Y , der also wieder charakterisiert ist durch die

2.7.2 *Universelle Eigenschaft:* Für jeden komplexen Raum Z und jede holomorphe Abbildung $g: Z \rightarrow Y$ gilt:

Die holomorphen Abbildungen $h: Z \rightarrow X$ mit $p \circ h = g$ entsprechen genau den $\mathcal{O}_Z$ -Algebrenhomomorphismen $g^*A \rightarrow \mathcal{O}_Z$.

Insbesondere hat man also für $Z = X$, $h := \text{id}_X$ einen kanonischen $\mathcal{O}_X$ -Algebrenhomomorphismus $\alpha: p^*A \rightarrow \mathcal{O}_X$ ($p^*A = \mathcal{O}_X \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_Y} p^{-1}A$), und die Zuordnung in der universellen Eigenschaft besteht gerade in $h \mapsto h^*(\alpha)$.

Mit dieser universellen Eigenschaft beweist man leicht die *Verträglichkeit mit Basiswechsel*:

Ist $f: Y' \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, A eine $\mathcal{O}_Y$ -Algebren-
 (1) garbe von endlicher Darstellung, so ist $Y' \times_Y \text{Specan } A \cong \text{Specan } f^*A$.

Ist $f: Y' \rightarrow Y$ speziell die Inklusion eines Unterraumes $Y' \subset Y$,
 definiert durch eine Idealgarbe $I \subset \mathcal{O}_Y$, und $p: \text{Specan } A \rightarrow Y$
 die kanonische Abbildung, so ist also

$$(2) \quad p^{-1}(Y') \cong \text{Specan } f^*A = \text{Specan}(\mathcal{O}_Y/I) \otimes_{\mathcal{O}_Y} A = \text{Specan } A/IA.$$

Für $Y' = \{y\} \subset Y$ erhält man

$$p^{-1}(y) = \text{Specan } A_y/m_y A_y$$

und wiederum aus der universellen Eigenschaft schließt man:

(3) Die Punkte von $p^{-1}(y)$ entsprechen genau den nichttrivialen
 $\mathbb{C}$ -Algebrahomomorphismen $A_y/m_y A_y =: A(y) \rightarrow \mathbb{C}$.

2.7.3 Ein komplexer Raum X über Y heißt *relativer Kegel*, wenn
 eine holomorphe Abbildung ("Skalarmultiplikation") $\mu: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$
 gegeben ist, so daß die folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$(i) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times X & \xrightarrow{\quad \mu \quad} & X \\ p \circ \text{pr}_X \searrow & & \swarrow p \\ & Y & \end{array} \quad (\text{Fasertreue})$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times X & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{C}} \times \mu} & \mathbb{C} \times X \\
 \downarrow \tilde{\mu} \times \text{id}_X & & \downarrow \mu \\
 \mathbb{C} \times X & \xrightarrow{\mu} & X
 \end{array} \quad (\text{Assoziativität})$$

$$\begin{array}{ccc}
 \{1\} \times X & \xrightarrow{\mu|_{\{1\} \times X}} & X \\
 \searrow \text{pr}_X & & \parallel \\
 & & X
 \end{array} \quad (\text{"neutrales Element"})$$

(Diese Definition ist allgemeiner als etwa die in [3] und schließt pathologische Fälle - wie z.B. $\mu = \text{pr}_X$ - nicht aus).

Ist nun $X = \text{Specan } A$ mit einer $\mathcal{O}_Y$ -Algebrengarbe A von endlicher Darstellung, so ist μ mit (i) aufgrund von 2.7.2 gleichwertig mit einem $\mathcal{O}_Y$ -Algebrenhomomorphismus

$$(i)' \quad \nu: A \rightarrow \mathcal{O}_Y[t] \otimes_{\mathcal{O}_Y} A \cong A[t].$$

Lokal (für $a \in A(U)$) hat man also $\nu(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}}^{\text{endl.}} \pi_k(a) \cdot t^k$ mit

$\mathcal{O}_Y$ -Modulhomomorphismen $\pi_k: A \rightarrow A$.

Beachtet man, daß der üblichen Multiplikation über Y der $\mathcal{O}_Y$ -Algebrenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_Y[t] \rightarrow \mathcal{O}_Y[t] \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[t], \quad \varphi \rightarrow \varphi \otimes \varphi$$

entspricht, so findet man leicht aus (ii):

$$(ii)' \quad \pi_{k'}(\pi_k(a)) = \delta_{kk'} \cdot \pi_k(a) \quad (\delta_{kk'} = \text{Kroneckersymbol}),$$

d.h. die $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind paarweise orthogonale Projektoren.

Die Beschränkung von μ auf $\{1\} \times X$ wird beschrieben durch die Komposition $A \rightarrow \mathcal{O}_Y[t] \otimes_{\mathcal{O}_Y} A \cong A[t] \rightarrow A$,
 $t \mapsto 1$

also erhält man schließlich

$$(iii)' \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi_k = \text{id}_A.$$

Mit $A_k := \pi_k(A)$ gilt also $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und man verifiziert darüberhinaus sofort $A_k \cdot A_{k'} \subset A_{k+k'}$, d.h.

A ist eine *graduierete* $\mathcal{O}_Y$ -Algebra.

(Dem "pathologischen" Fall $\mu = \text{pr}_X$ entspricht $A = \bigoplus A_k$ mit $A_0 = A$, $A_k = 0$ für $k \geq 1$).

Umgekehrt liefert jede graduierete $\mathcal{O}_Y$ -Algebra endlicher Darstellung $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$ als Specan A einen relativen Kegel über Y ; die "Skalarmultiplikation" ergibt sich (durch lineare Fortsetzung) aus $A_k \rightarrow A_k[t]$, $a \rightarrow a \cdot t^k$.

Im allgemeinen braucht hier die Graduation von $A|_U \cong \mathcal{O}_U[t_1, \dots, t_n]/J$, wenn J von homogenen Polynomen erzeugt ist,

nicht mit der natürlichen Graduation übereinstimmen (A braucht nicht von den homogenen Elementen vom Grad 1 erzeugt zu sein). Dies wird in den folgenden Beispielen jedoch stets der Fall sein. Geometrisch bedeutet es, daß lokal die Skalarmultiplikation durch Beschränkung der üblichen Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ entsteht, jede Faser von X über Y also ein "herkömmlicher" Kegel des $\mathbb{C}^n$ ist.

In diesem letzteren Fall gehört zu $X = \text{Specan } A$ in natürlicher Weise eine *relativ projektiv algebraische Varietät* $\mathbb{P}(X) = \text{Proj } A$ (für die lokale Situation $\text{Specan } A|_U \subset Y \times \mathbb{C}^n$ ist dies erläutert in [3]; im globalen Fall läßt sich alles zusammenkleben).

2.7.4 Sei nun $D \subset Y$ ein komplexer Unterraum, definiert durch eine kohärente Idealgarbe $I \subset \mathcal{O}_Y$. Dann ist

$$A := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k \quad \text{eine graduierte } \mathcal{O}_Y\text{-Algebren-} \text{garbe.}$$

LEMMA: A ist von endlicher Darstellung.

Beweis: Wir können $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mathcal{O}_Y$ annehmen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ enthält man dann einen surjektiven $\mathcal{O}_Y$ -Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}_Y[u_1, \dots, u_n](k) \longrightarrow I^k, \quad u_i \longmapsto \alpha_i$$

(= homogene Polynome vom Grad k)

und somit eine exakte Garbensequenz

$$(*) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{O}_Y[u_1, \dots, u_n] \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k \rightarrow 0.$$

Es ist zu zeigen, daß die Idealgarbe

$$K \subset \mathcal{O}_Y[u_1, \dots, u_n] \text{ lokal von endlichem Typ ist.}$$

$$\text{Sei } K_i := K \cap \mathcal{O}_Y[u_1, \dots, u_n]_{(i)}, \text{ also } K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i.$$

Jedes K_i erzeugt eine kohärente Idealgarbe $\tilde{K}_i \subset \mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}^1}$.

Nach einem bekannten Theorem von OKA/CARTAN (siehe z.B. [4], 0.40) wird die aufsteigende Folge $(\bigcup_{i \leq k} \tilde{K}_i)_{k \in \mathbb{N}}$ lokal stationär. Also gilt dies auch für die Folge der $\bigcup_{i \leq k} K_i$ und somit ist K lokal von endlichem Typ. □

Damit ist $X := \text{Specan} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k$ definiert und es ist ein relativer Kegel über Y . Aus (*) geht hervor, daß die Graduation "natürlich" ist, also erhält man kanonisch die dazugehörige relative projektive Varietät $X := \mathbb{P}(X) = \text{Projan} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k$ und eine eigentliche holomorphe Abbildung $p: X \rightarrow Y$.

2.7.5 SATZ: $p: \text{Projan} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k \rightarrow Y$ ist die monoidale Transformation von Y mit dem durch die Idealgarbe $I \subset \mathcal{O}_Y$ definierten Unterraum $D \subset Y$ als Zentrum.

Beweis: Es würde genügen, mit etwas allgemeinem Formalismus die Eigenschaften 2.1 (i) und (ii) nachzuprüfen (vgl. [7]). Mir erscheint es jedoch aufschlußreicher, die Übereinstimmung der Konstruktionen direkt nachzurechnen.

Dazu gehen wir zurück zu 2.4 und verwenden auch wieder die dortigen Bezeichnungen (es ist klar, daß wir uns auf die in Y lokale Situation beschränken können). Wir setzen darüberhinaus voraus, daß $D \subset Y$ analytisch dünn ist (siehe 1.1); der allgemeine Fall erfordert (einfache) zusätzliche Überlegungen in Zusammenhang mit 1.4.

Weiter genügt es, die Übereinstimmung auf den zugehörigen affinen Kegeln zu bestätigen; wir bleiben also bei $\tilde{X} = \text{Specan } A = \text{Specan } \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k$.

Schließlich sieht man schnell, daß $(\text{Projan } A) \setminus p^{-1}(D) \rightarrow Y \setminus D$ ein Isomorphismus ist, denn für $y \in Y \setminus D$ ist $A_y = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I_y^k \cong \mathcal{O}_{Y,y}[t]$ ($I_y = \mathcal{O}_{Y,y}!$), also ist lokal

$$\text{Specan } A|_U \cong U \times \mathbb{C}, \quad p|_U = \text{pr}_U \quad \text{und damit}$$

$$p|_{\text{Projan } A|_U} = p|_{P(U \times \mathbb{C})} \cong \text{id}_U.$$

Es genügt deshalb, Punkte über $D \subset Y$ zu betrachten.

Zum σ -Prozeß $Z \rightarrow \mathbb{C}^n$ gehört der relative Kegel

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \text{mit } \tilde{Z} = \{(z,u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : z_i u_j = z_j u_i, \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \leq i, j \leq n\} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{C}^n & & \end{array}$$

mit anderen Worten: $\tilde{Z} = \text{Specan}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}[u_1, \dots, u_n] / (z_i u_j - z_j u_i))$

(hier und im Folgenden ist $(z_i u_j - z_j u_i)$ immer als das Ideal in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}[u_1, \dots, u_n] \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ zu verstehen, welches $\tilde{Z}$ definiert).

Aus 2.7.2 (1) folgt dann für $\tilde{Y}^* := Y \times_{\mathbb{A}^n} \tilde{Z}$ (vgl. 2.4 :
 $D = \alpha^{-1}(0)$ mit $\alpha: Y \rightarrow \mathbb{A}^n$!) die Darstellung

$$\tilde{Y}^* = \text{Specan} \left(\alpha^* \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}[u_1, \dots, u_n]}{(z_i u_j - z_j u_i)} \right)$$

mit

$$\alpha^* \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}[u_1, \dots, u_n]}{(z_i u_j - z_j u_i)} = \alpha^{-1} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}[u_1, \dots, u_n]}{(z_i u_j - z_j u_i)} \right) \otimes_{\alpha^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}} \mathcal{O}_Y.$$

Hier wird der Garbenmorphismus $\alpha^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ für $y \in D$ beschrieben durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, 0} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Y, y}, \quad z_i \longmapsto \alpha_{i, y} \\ \parallel & & \\ \mathbb{A}\{z_1, \dots, z_n\} & & \end{array}$$

Damit ist

$$\alpha^* \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}[u_1, \dots, u_n]}{(z_i u_j - z_j u_i)} \right)_y = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, 0}[u]}{(z_i u_j - z_j u_i)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n, 0}} \mathcal{O}_{Y, y} \cong \frac{\mathcal{O}_{Y, y}[u_1, \dots, u_n]}{(\alpha_{i, y} u_j - \alpha_{j, y} u_i)}.$$

Man sieht nun unmittelbar, daß der surjektive Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_Y[u_1, \dots, u_n] \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k \quad \text{aus 2.7.4}$$

einen surjektiven Homomorphismus

$$(**) \quad \frac{\mathcal{O}_{Y,y}[u_1, \dots, u_n]}{(\alpha_{i,y} u_j - \alpha_{j,y} u_i)} \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_y^k \quad (y \in D)$$

induziert.

Allgemein gilt, daß einem solchen Epimorphismus eine abgeschlossene Immersion

$$(**)' \quad \text{Specan} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^k \longrightarrow \text{Specan} \alpha^* \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}[u_1, \dots, u_n]}{(z_i u_j - z_j u_i)} = Y \times_{\mathbb{C}^n} \tilde{Z}$$

entspricht, und zwar wird $\text{Specan} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^k$ definiert durch die Idealgarbe von $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{C}^n} \tilde{Z}$, welche vom Kern von (**) erzeugt wird!

Es genügt nun zu zeigen, daß diese Idealgarbe übereinstimmt mit der, die $\tilde{Y}' \subset \tilde{Y}^*$ definiert, wobei $\tilde{Y}' = \overline{\tilde{Y}^* \setminus D \times \tilde{Z}}$ (vgl. 2.4 (2)).

Nach 1.4 (1), (2) findet man für die letztere

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_i u_j - \alpha_j u_i) : (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^k}{(\alpha_i u_j - \alpha_j u_i)} \subset \mathcal{O}_{\tilde{Y}^*, Y^*} \cong \frac{\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{C}^n; (y, 0)}}{(\alpha_i u_j - \alpha_j u_i)}.$$

Man überlegt sich leicht, daß es auch hier genügt, die Ideale in $\mathcal{O}_{Y,y}[u_1, \dots, u_n]$ zu betrachten.

Somit haben wir das Problem reduziert auf die Aussage des folgenden Hilfssatzes:

2.7.6 HILFSSATZ: Seien R ein Ring, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, und $I \subset R$ das von $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ erzeugte Ideal. I enthalte einen Nichtnullteiler. Dann stimmen die folgenden Ideale in $R[u_1, \dots, u_n]$ überein:

$$K := \ker(R[u_1, \dots, u_n] \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k)$$

$$u_i \longmapsto \alpha_i$$

und

$$Q + \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q \cdot I^k \quad \text{mit} \quad Q := (\alpha_i u_j - \alpha_j u_i)_{i,j=1, \dots, n} \cdot R[u_1, \dots, u_n] .$$

Beweis:
$$Q + \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q \cdot I^k \subset K :$$

$Q \subset K$ ist trivial; sei also $\varphi(u) \in R[u_1, \dots, u_n]$, $\varphi(u) \cdot I^k \subset Q$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Ist $\alpha \in I$ Nichtnullteiler, so auch $\alpha^k \in I^k$, und $\varphi(u) \cdot \alpha^k \in Q$. Offenbar ist dann $\varphi(\alpha) \cdot \alpha^k = 0$, also $\varphi(\alpha) = 0$, d.h. $\varphi(u) \in K$.

" $\supset$ ": Sei $\sum_{\substack{\rho \in \mathbb{N}^n \\ |\rho| \leq k}} c_\rho u^\rho \in K$, d.h. $c_\rho \alpha^\rho = 0$.

Es genügt, den Fall eines homogenen $\sum_{|\rho|=k} c_\rho u^\rho \in R[u_1, \dots, u_n]$ zu betrachten.

Für jedes $\alpha^x = \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n} \in I^k$ ist zu zeigen:

$$\sum_{|\rho|=k} c_\rho u^\rho \cdot \alpha^x \in Q .$$

Nun dürfen wir in jedem Monom $c_\rho u_1^{\rho_1} \dots u_n^{\rho_n} \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n}$ ($\rho_1 + \dots + \rho_n = x_1 + \dots + x_n = k$) einen Faktor $u_i \alpha_j$ einsetzen durch $u_j \alpha_i$ (die Differenz ist ein Vielfaches von $u_i \alpha_j - u_j \alpha_i$, liegt also in Q).

Mit dieser Operation können wir das Monom in endlich vielen Schritten umformen zu

$$c_\rho u_1^{x_1} \dots u_n^{x_n} \alpha_1^{\rho_1} \dots \alpha_n^{\rho_n}.$$

Insgesamt erhält man so

$$\sum_{|\rho|=k} c_\rho u^\rho \cdot \alpha^x - \sum_{|\rho|=k} c_\rho u^x \alpha^\rho \in Q,$$

und wegen der Voraussetzung $\sum_{|\rho|=k} c_\rho \alpha^\rho = 0$ ist man fertig.

□

2.8 Die Konstruktion der monoidalen Transformation als

$\text{Projan} \oplus_{k \in \mathbb{N}} I^k$ hat den Vorteil, daß sie eine algebraische

Beschreibung der Hyperfläche liefert, zu der D "aufgeblasen" wird.

Setzen wir wieder $\tilde{p}: \tilde{X} := \text{Specan} \oplus_{k \in \mathbb{N}} I^k \longrightarrow Y$, so ist nach

2.7.2 (2) das Urbild $\tilde{p}^{-1}(D) \subset \tilde{X}$ gegeben durch $\tilde{p}^{-1}(D) =$

$$= \text{Specan} \left(\oplus_{k \in \mathbb{N}} I^k \right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y / I = \text{Specan} \oplus_{k \in \mathbb{N}} I^k / I^{k+1}.$$

Dieses Gebilde

$$C_{Y,D} := \text{Specan} \oplus_{k \in \mathbb{N}} I^k / I^{k+1}$$

heißt *Normalenkegel* von D in Y .

BEISPIELE:

- (1) Ist $Y = \mathbb{C}^n$ und $D = \mathbb{C}^m \times \{0\} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} = Y$,
also $I = (z_{m+1}, \dots, z_n)$, so ist

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^k / I^{k+1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}[z_{m+1}, \dots, z_n]$$

und $C_{Y,D} \cong D \times \mathbb{C}^{n-m}$. Über jedem $y \in D$ liegt also der komplexe Vektorraum $\mathbb{C}^{n-m}$, der als "Normalenraum" an D in Y aufgefaßt werden kann.

Daran ändert sich im Prinzip nichts, wenn D komplexe Untermannigfaltigkeit einer komplexen Mannigfaltigkeit Y ist.

- (2) Ist der komplexe Raum Y eingebettet in $Z \cong \mathbb{C}^N$ (lokale Betrachtung) und ist $J \subset \mathcal{O}_Z$ die Idealgarbe von D in Z , so entspricht dem Epimorphismus $\mathcal{O}_{Z,Y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,Y}$ (für alle $y \in Y$) ein Epimorphismus

$$\bigoplus J_y^k / J_y^{k+1} \rightarrow \bigoplus I_y^k / I_y^{k+1},$$

und somit eine abgeschlossene Immersion $C_{Y,D} \hookrightarrow C_{Z,D}$.

Bei Singularitätenfreiem D hat man also eine Darstellung von $C_{Y,D}$ als "Unterkegel" des Normalenkegels von D in Z .

Diese Überlegung sollte jedoch niemanden dazu verleiten, für ein festes $y \in D \subset Y$ den Kegel $C_{Y,D;y}$ als Unterkegel des Whitney-Tangentenkegels $C_{Y,y}$ anzusehen; im allgemeinen hat man keine Beziehung zwischen den beiden Kegeln, wie das folgende Beispiel zeigt:

(3) Sei $Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x^2 = y^2 z\} \subset \mathbb{C}^3$,

$$D := \{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \subset Y.$$

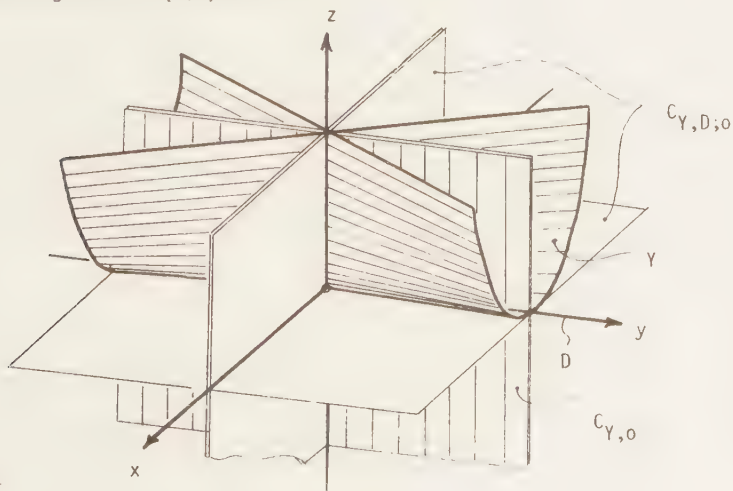
Der Whitney-Tangentenkegel im Nullpunkt ist definiert durch die Initialform von $x^2 - y^2 z$, also durch $x^2 = 0$, d.h. $C_{Y,0} =$ "doppelte (y,z) -Ebene".

Zur Bestimmung von $C_{Y,D;0}$ benötigen wir eine Darstellung von $(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k / I^{k+1})_0$ in der Form $\mathbb{C}\{y\}[x,z]/(\text{Ideal})$, wobei $I =$
 $= (\bar{x}, \bar{z})_0 = (\bar{x}, \bar{z}) \frac{\mathbb{C}\{x,y,z\}}{(x^2 - y^2 z)}$ ist und $\bar{x}, \bar{z}$ die Restklassen der Koordinatenfunktionen x, z modulo $(x^2 - y^2 z)$ bezeichnen.

Mit etwas Rechnung erhält man:

$$(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k / I^{k+1})_0 \rightarrow \mathbb{C}\{y\}[x,z]/(y^2 z), \quad \begin{aligned} \bar{x} &\rightarrow x \bmod (y^2 z), \\ \bar{z} &\rightarrow z \bmod (y^2 z) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus graduierter $\mathbb{C}\{y\}$ -Algebren (man betrachte die Abbildung zunächst in der anderen Richtung auf den linearen Termen in x, z). Also besteht $C_{Y,D;0}$ aus der (x,y) -Ebene und der doppelt gezählten (x,z) -Ebene!



Figur 3

§3. HOLOMORPHE ABBILDUNGEN ZWISCHEN 2-DIMENSIONALEN MANNIGFALTIGKEITEN

Von H. HOPF [13] stammt der Satz, daß jede eigentliche Modifikation einer 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit (zu einer anderen Mannigfaltigkeit) durch iterierte σ -Prozesse entsteht. Dieses Ergebnis kann man auch interpretieren als Auflösung der Entartungen gewisser holomorpher Abbildungen. In diesem Paragraphen wird die Auflösung der Entartungen beliebiger holomorpher Abbildungen zwischen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten untersucht. Zur Formulierung des Hauptergebnisses ist es bequem, den Begriff der *strikten Transformaten* zu verwenden, der zunächst erläutert werden soll:

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, $k: Y' \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung, welche über $Y \setminus D$ ($D \subset Y$ analytisch dünn) einen Isomorphismus induziert, und sind $p: X \times_Y Y' \rightarrow X$, $q: X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ die kanonischen Projektionen, so ist p im allgemeinen keine eigentliche Modifikationsabbildung, selbst wenn $f^{-1}(D) \subset X$ analytisch dünn ist (was im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll). Man bildet deshalb

$$X' := \overline{X \times_Y Y' \setminus p^{-1}(f^{-1}(D))} \quad (\text{vgl. 1.4})$$

und wir setzen $h := p|_{X'}$, $f' := q|_{X'}$.

h ist nun eigentliche Modifikationsabbildung, und das so konstruierte X' (bzw. f') heißt *strikte Transformierte von X (bzw. f) unter k* .

Der Vergleich mit der meromorphen Komposition (1.3 - 1.5) lehrt, daß $X' \subset X \times_Y Y' \subset X \times Y'$ als Graph der meromorphen Komposition $k^{-1} \Delta f: X \rightrightarrows Y'$ aufgefaßt werden kann.

Nun zum Hauptergebnis dieses Paragraphen:

3.1 SATZ: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, deren Funktionaldeterminante (bezüglich lokaler Koordinaten) nirgends identisch verschwindet. Sei $K \subset X$ eine Teilmenge, so daß die Beschränkung von f auf K eigentlich ist. Dann gibt es eine eigentliche Modifikationsabbildung $k: Y' \rightarrow Y$, welche aus iterierten σ -Prozessen über diskreten Punkten in Y besteht, so daß die Beschränkung der strikten Transformierten $f': X' \rightarrow Y'$ auf $h^{-1}(K)$ endlich ist.

Ist f schon eigentlich, so kann natürlich $K = X$ gewählt werden; ansonsten kann man speziell jeden kompakten Teil $K \subset X$ nehmen.

Die Voraussetzung an die Funktionaldeterminante bedeutet, daß auf jeder Zusammenhangskomponente von X die Abbildung f den Rang 2 hat.^{*)} Die iterierten σ -Prozesse, aus denen sich k zusammensetzt, werden genau über den Punkten von

$$D := \{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ trifft } K \text{ mit 1-dimensionaler Komponente}\}$$

ausgeführt; wir werden uns überlegen, daß diese Menge diskret ist.

^{*)} d.h. es ist $\text{fmd } f = 0$, vgl. (0.5).

Der Satz von HOPF folgt aus 3.1 als

3.2 KOROLLAR: Ist $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung zwischen 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten, so entsteht f durch eine lokal-endliche Folge von iterierten σ -Prozessen über diskreten Punkten in Y .

Beweis des Korollars:

Ist f eine eigentliche Modifikationsabbildung, so ist $f^{-1}: Y \rightarrow X$ meromorph und $f|X' \setminus f^{-1}(D) \rightarrow Y \setminus D$ biholomorph (D wie in 3.1). (Vgl. 1.2, S. 14). Nun ist mit den Bezeichnungen von 3.1 die strikte Transformierte $f': X' \rightarrow Y'$ endlich und $f'|X' \setminus h^{-1}(f^{-1}(D)) \rightarrow Y' \setminus k^{-1}(D)$ wieder biholomorph. Da nach der Konstruktion von k aus σ -Prozessen Y' wieder Mannigfaltigkeit ist, folgt: $f': X' \rightarrow Y'$ ist biholomorph.

Es bleibt zu zeigen, daß im nebenstehenden Diagramm unter den gegebenen Voraussetzungen auch h biholomorph ist, oder (äquivalent) die meromorphe Komposition $h^{-1} \circ k^{-1} \Delta f: X \rightarrow Y'$ keine Unbestimmtheitsstellen besitzt.

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\cong} & Y' \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Die Beweisidee hierfür entnehmen wir [13], S. 147/148:

Angenommen, $x^0 \in X$ sei Unbestimmtheitsstelle von $k^{-1} \Delta f$. Mit $y^0 := f(x^0) \in D$ ist $\dim_{x^0} f^{-1}(y^0) = 1$. In lokalen Koordinaten x_1, x_2 um x^0 (und y_1, y_2 um y^0) wird f durch $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ dargestellt; wegen $\dim_{x^0} f^{-1}(y^0) = 1$ ist $\text{ggT}(\varphi_1, \varphi_2) =: x \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$

eine Nichteinheit, und da x^0 Unbestimmtheitsstelle ist, sind in der Darstellung $\varphi_1 = x\psi_1$, $\varphi_2 = x\psi_2$ auch ψ_1 und ψ_2 beides Nichteinheiten (vgl. 2.2, S. 25/26). Nun sind für verschiedene komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ mit ψ_1, ψ_2 auch $a\psi_1 + \psi_2$, $b\psi_1 + \psi_2$ teilerfremd; wir können also ein $a \in \mathbb{C}$ finden, so daß $a\psi_1 + \psi_2$ und x teilerfremd sind (x enthält nur endlich viele Primfaktoren). Sei F eine irreduzible Komponente von $(a\psi_1 + \psi_2)^{-1}(0) \subset X$, und $G \xrightarrow{n} F$ (mit einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $0 \in G$, $n(0) = x^0$) die Normalisierung. n ist bijektiv, wenn wir uns auf eine genügend kleine Umgebung von x^0 in X beschränken. Da $F \setminus \{x^0\}$ in $X \setminus f^{-1}(D)$ liegt, wird F - nach Voraussetzung ist f außerhalb $f^{-1}(D)$ biholomorph! - durch f bijektiv auf das Kurvenstück der Gleichung $y_2 = -ay_1$ um y^0 in Y abgebildet, und die Komposition

$$G \xrightarrow{n} F \xrightarrow{f|F} Y \xrightarrow{y_1} \mathbb{C}$$

(lokal)

ergibt eine injektive holomorphe Funktion $y_1 = \eta(z) = x(n(z)) \cdot \psi_1(n(z))$. Es muß also $\eta'(0) \neq 0$ sein, und daraus folgt sofort $x(x^0) \neq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\dim_{x^0} f^{-1}(y^0) = 1$. $\square$

3.3

Zum Beweis von 3.1 überlegen wir uns zunächst, daß die Menge

$$D := \{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ trifft } K \text{ mit 1-dimensionaler Komponente}\}$$

oder gleich allgemeiner (in dieser Form werden wir es benötigen) nach einer beliebigen eigentlichen Modifikationsabbildung $k: Y' \rightarrow Y$ mit der strikten Transformierten $f': X' \rightarrow Y'$ und der eigentlichen Modifikationsabbildung $h: X' \rightarrow X$ die Menge

$$D' := \{y' \in Y': f'^{-1}(y') \text{ trifft } h^{-1}(K) \text{ mit einer } 1\text{-dimensionalen Komponente}\}$$

diskret ist.

D' kann beschrieben werden als Bild (unter f') von $E_{f'} \cap h^{-1}(K)$, wo $E_{f'} \subset X'$ die Entartungsmenge von f' ist. Über einem kompakten Teil $C \subset Y'$ ist $f'^{-1}(C) \cap h^{-1}(K)$ kompakt, da mit $f|K \rightarrow Y$ auch $f'|h^{-1}(K) \rightarrow Y'$ eigentlich ist. Die analytische Menge $E_{f'} \subset X'$ trifft also $f'^{-1}(C) \cap h^{-1}(K)$ nur mit endlich vielen irreduziblen Komponenten, und somit besteht das Bild von $E_{f'} \cap f'^{-1}(C) \cap h^{-1}(K)$ in $C \subset Y'$ nur aus endlich vielen Punkten. Insgesamt folgt: $D' \subset Y'$ ist diskret!

Nun können wir nach folgender Vorschrift die nebenstehende "Leiter" bilden:

k_1 ist die monoidale Transformation mit Zentrum D (d.h. hier einfach: die simultane Anwendung des σ -Prozesses in den Punkten von D). $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ ist die strikte Transformierte von f unter k_1 und $h_1: X_1 \rightarrow X$ die dabei entstehende eigentliche Modifikationsabbildung (X_1 ist i. allg. nicht mehr singularitätenfrei; ein Beispiel hierfür folgt aus 1.1 (7), S. 12!).

Für $i \geq 1$ ist $k_{i+1}: Y_{i+1} \rightarrow Y_i$ analog der simultane σ -Prozeß in den Punk-



ten der nach der vorhergehenden Überlegung wieder diskreten Menge $D_i := \{y' \in Y_i : f_i^{-1}(y') \text{ trifft } K_i \text{ mit einer 1-dimensionalen Komponente}\}$, wo wir $K_i := (h_1 \circ \dots \circ h_i)^{-1}(K) \subset X_i$ gesetzt haben; $f_{i+1}: X_{i+1} \rightarrow Y_{i+1}$ ist die strikte Transformierte von $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ und $h_{i+1}: X_{i+1} \rightarrow X_i$ die dabei auftretende eigentliche Modifikationsabbildung über X_i .

Der Satz 3.1 ist bewiesen, wenn gezeigt wird, daß über jedem $y_0 \in D$ nach endlich vielen (n) Schritten die Menge $D_n \cap (k_1 \circ \dots \circ k_n)^{-1}(y_0)$ leer wird. Dann ist der projektive Limes $Y' := \varprojlim Y_i$ eine wohldefinierte Mannigfaltigkeit, $k: Y' \rightarrow Y$ eine eigentliche Modifikationsabbildung, die lokal über Y aus endlich vielen iterierten σ -Prozessen über den Punkten von D besteht, und die strikte Transformierte $f': X' \rightarrow Y'$ von f unter k ist auf $h^{-1}(K)$ diskret, also endlich.

Zum indirekten Beweis nehmen wir also an, daß es ein $y_0 \in D \subset Y$ gibt und für jedes $i \geq 1$ ein $y_i \in D_i \subset Y_i$ mit $k_i(y_i) = y_{i-1}$. Da die strikte Transformierte X_i von X_{i-1} ein Teil des Faserprodukts $X_{i-1} \times_{Y_{i-1}} Y_i$ ist, induziert die Abbildung $h_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ (als Beschränkung der kanonischen Projektion $X_{i-1} \times_{Y_{i-1}} Y_i \rightarrow X_{i-1}$) auf jeder Faser $f_i^{-1}(y_i)$ eine Einbettung

$$h_i: f_i^{-1}(y_i) \rightarrow f_{i-1}^{-1}(y_{i-1}).$$

Dies erlaubt uns, für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Faser $f_i^{-1}(y_i)$ als Unterraum von $f_{i-1}^{-1}(y_{i-1})$ aufzufassen, und die absteigende Folge von Unterräumen von $f^{-1}(y_0)$ zu betrachten:

$$f^{-1}(y_0) \supset f_1^{-1}(y_1) \supset f_2^{-1}(y_2) \supset \dots \supset f_i^{-1}(y_i) \supset \dots$$

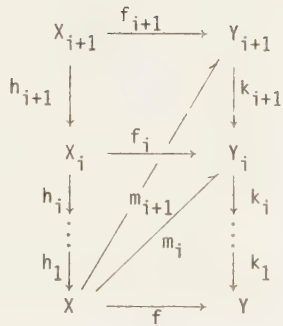
Offenbar erhält man nun den gewünschten Widerspruch, wenn gezeigt wird: Diese absteigende Folge kann auf dem kompakten Teil $f^{-1}(y_0) \cap K$ nicht stationär werden!

Damit der Beweis hierfür gelingt, werden wir die Fasern mit ihrer natürlichen (i.allg. nichtreduzierten) komplexen Struktur betrachten, und zeigen, daß die zugehörige aufsteigende Folge der definierenden Idealgarben in $\mathcal{O}_X$ nicht stationär werden kann. Hierfür wiederum genügt es, zu einem festen i ein $x_0 \in f_i^{-1}(y_i) \cap K \subset f^{-1}(y_0) \cap K$ zu wählen und zu zeigen, daß die aufsteigende Folge der Ideale in $\mathcal{O}_{X, x_0}$, welche die Keime der Fasern $f_j^{-1}(y_j)$ ($j > i$) in x_0 definieren, nicht stationär werden kann.

Es ist zu bemerken, daß die Inklusionen nicht bei jedem Schritt echt zu sein brauchen; dies sieht man schon an einfachen Beispielen wie etwa $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1^n x_2)$, wenn man die folgenden Rechnungen darauf anwendet.

3.4 Um die Fasern $f_i^{-1}(y_i)$ in den Griff zu bekommen, betrachten wir die meromorphen Kompositionen $m_i := (k_1 \circ \dots \circ k_i)^{-1} \circ f: X \rightarrow Y_i$. Aus der Assoziativität der meromorphen Komposition folgt, daß X_{i+1} gleichzeitig als Graph der meromorphen Komposition $k_{i+1}^{-1} \circ f_i: X_i \rightarrow Y_{i+1}$ und auch als Graph von $k_{i+1}^{-1} \circ m_i: X \rightarrow Y_{i+1}$ aufgefaßt werden kann (besser: X_{i+1} ist zum letzteren Graphen isomorph). Insbesondere ist jede Faser $f_i^{-1}(y_i)$ isomorph zu $m_i^{-1}(y_i)$.

Da wir uns nur für die Keime in $x_0 \in X$ interessieren, benötigen wir also eine genaue Beschreibung der Keime des Graphen einer meromorphen Abbildung der Gestalt $(k_1 \circ \dots \circ k_i)^{-1} \Delta f$, wo die $k_1, \dots, k_i$ jeweils aus simultanen σ -Prozessen in diskreten Punkten entstehen.



Ausreichende Auskunft hierüber gibt das folgende

LEMMA (Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in 3.3):

- (1) Seien η_1, η_2 lokale Koordinaten auf Y um y_0 , so daß f in der Umgebung von $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ gegeben ist durch $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{M}_{x_0} \subset \mathcal{O}_{X, x_0}$. Sei $\sigma: Y^* \rightarrow Y$ der σ -Prozeß in y_0 , und $y_1 \in \sigma^{-1}(y_0)$. Sind $v_1: v_2$ homogene Koordinaten des $\mathbb{P}_1$, so wird y_1 dargestellt durch $(0, 0; v_1^0: v_2^0) \in \sigma^{-1}(y_0) \cong \{0\} \times \mathbb{P}_1$. Wir nehmen oBdA $v_1^0 \neq 0$ an und setzen $u_0 := \frac{v_2^0}{v_1^0}$; dann sind $\eta'_1 := \eta_1$ und $\eta'_2 := \frac{v_2}{v_1} - u_0$ lokale Koordinaten um y_1 in Y^* (und es ist $\eta_2 = \eta'_1(\eta'_2 + u_0)$).

BEHAUPTUNG: Der Keim des Graphen G von $\sigma^{-1} \Delta f$ im Punkt (x_0, y_1) wird bezüglich der Koordinaten η'_1, η'_2 in $(X, x_0) \times (\mathbb{A}^2, 0)$ beschrieben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta'_1 - \Phi_1 &= 0 \\ \eta'_2 \Psi_1 - (\Psi_2 - u_0 \Psi_1) &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

wo mit $\Lambda := \text{ggT}(\Phi_1, \Phi_2)$ die Keime $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{O}_{X, x_0}$ definiert sind durch $\Phi_1 = \Lambda \Psi_1$, $\Phi_2 = \Lambda \Psi_2$.

(2) Sei $x_0 \in m_i^{-1}(y_i)$. Es gibt lokale Koordinaten (η_1, η_2) um $y_i \in Y_i$, so daß auf dem Graphen G_i von $m_i: X \rightarrow Y_i$ in einer Umgebung von (x_0, y_i) Gleichungen der folgenden Gestalt erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \eta_1 \rho_1 - \phi_1 &= 0 \\ \eta_2 \rho_2 - \phi_2 &= 0 \\ P_1(\eta_1, \eta_2) - \Phi_1 &= 0 \\ P_2(\eta_1, \eta_2) - \Phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (**)$$

mit $\phi_1, \phi_2, \rho_1, \rho_2, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{O}_{X, x_0}$, $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[\eta_1, \eta_2]$, wo die Paare (ϕ_1, ρ_1) , (ϕ_2, ρ_2) , (ρ_1, ρ_2) jeweils teilerfremd sind.

Die Gleichungen (**) sind gültig auf einer Umgebung

$U \times \{|\eta_1| < \varepsilon_1, |\eta_2| < \varepsilon_2\}$ von $(x_0, y_i) \in X \times Y_i$, wo $\varepsilon_1 = \infty$ (bzw. $\varepsilon_2 = \infty$) gilt, sofern ρ_1 (bzw. ρ_2) Nichteinheit ist.

(3) Es liege die Situation von (2) vor. Sei $\sigma: Y_i^* \rightarrow Y_i$ der σ -Prozeß in $y_i \in Y_i$, und sei $y_{i+1} \in \sigma^{-1}(y_i)$ in lokalen Koordinaten (analog zu Teil (1)) gegeben durch $(0, 0; 1; w_0)$. In den Koordinaten $\eta_1' := \eta_1$, $\eta_2' := \frac{v_2}{v_1} - w_0$ um y_{i+1} in Y_{i+1} sind auf dem Graphen G_{i+1} von $\sigma^{-1} \circ m_i: X \rightarrow Y_{i+1}$ in einer Umgebung von (x_0, y_{i+1}) folgende Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \eta_1' \rho_1 - \phi_1 &= 0 \\ \eta_2' (\psi_1 \rho_2) - (\psi_2 \rho_1 - w_0 \psi_1 \rho_2) &= 0 \\ P_1(\eta_1', \eta_1'(\eta_2' + w_0)) - \Phi_1 &= 0 \\ P_2(\eta_1' - \eta_1'(\eta_2' + w_0)) - \Phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (***)$$

Dabei sind mit $\lambda := \text{ggT}(\varphi_1, \varphi_2)$ die Keime $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{O}_{X, x_0}$ definiert durch $\varphi_1 = \lambda \psi_1$, $\varphi_2 = \lambda \psi_2$.

ZUSATZ: Betrachtet man in (1) und (3) anstelle von $y_1 = (0, 0; 1: u_0)$ und $y_{i+1} = (0, 0; 1: w_0)$ die Fälle $y_1 = (0, 0; u'_0: 1)$ und $y_{i+1} = (0, 0; w'_0: 1)$, so erhält man anstelle von (*) und (***) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta'_1 \psi_2 - (\psi_1 - u'_0 \psi_2) &= 0 \\ \eta'_2 - \phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

und

$$\begin{aligned} \eta'_1(\psi_2 \rho_1) - (\psi_1 \rho_2 - w'_0 \psi_2 \rho_1) &= 0 \\ \eta'_2 \rho_2 - \phi_2 &= 0 \\ P_1(\eta'_2(\eta'_1 + w'_0), \eta'_2) &= 0 \\ P_2(\eta'_2(\eta'_1 + w'_0), \eta'_2) &= 0 \end{aligned} \quad (***)$$

BEMERKUNG:

Im Folgenden wird sich herausstellen (siehe (3.5), S. 62 ff.), daß wir zum Beweis von (3.1) nur den Teil (1) des Lemmas benötigen.

Die Aussagen in (2) und (3) lassen offen, ob die Keime von m_i bzw. $\sigma^{-1} \Delta m_i$ schon durch die angegebenen Gleichungen vollständig beschrieben werden. Man findet zwar Beispiele für meromorphe Abbildungen zwischen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, deren Graph lokal nicht überall durch Gleichungen der Gestalt (**) beschrieben werden kann, doch sind diese meromorphen Abbildungen

nicht von der hier vorliegenden speziellen Bauart $m_i = (k_1 \circ \dots \circ k_i)^{-1} \Delta f$ mit σ -Prozessen $k_1, \dots, k_i$ und einer holomorphen Abbildung f .

Zum Beweis von (2) durch Induktion nach der Anzahl i der σ -Prozesse stellt (1) den Induktionsanfang und (3) den Induktionsschritt dar (unter Berücksichtigung des Zusatzes).

Beweis von (1):

Sei $V \subset Y$ eine (η_1, η_2) -Koordinatenumgebung von y_0 , die wir gleich als Nullumgebung im $\mathbb{C}^2$ auffassen, und $U \subset f^{-1}(V)$ eine genügend kleine Umgebung von x_0 , auf der $\phi_1, \phi_2, \Lambda, \Psi_1$ und Ψ_2 globale Repräsentanten besitzen (die wir mit denselben Symbolen bezeichnen) und auf der noch $\phi_1 = \Lambda \Psi_1$, $\phi_2 = \Lambda \Psi_2$ gilt. *) $\sigma^{-1} \Delta f$ ist auf $U \cap f^{-1}(y_0)$ holomorph und wird als Abbildung nach $\sigma^{-1}(V) \subset V \times \mathbb{P}_1$ dargestellt durch $(\phi_1, \phi_2; \Psi_1, \Psi_2)$.

Der Graph dieser holomorphen Abbildung über $U \cap f^{-1}(y_0)$ wird also in $(U \cap f^{-1}(y_0)) \times \sigma^{-1}(V)$ beschrieben durch die Gleichungen

$$\eta_1 - \phi_1 = 0$$

$$\eta_2 - \phi_2 = 0$$

$$u_1 : u_2 = \Psi_1 : \Psi_2, \text{ d.h. } u_1 \Psi_2 - u_2 \Psi_1 = 0.$$

Wir haben nach Voraussetzung über y_1 nur den Bereich $V' :=$

$\{(\eta_1, \eta_2; u_1 : u_2) \in \sigma^{-1}(V) \mid u_1 \neq 0\} \subset \sigma^{-1}(V) \subset V \times \mathbb{P}_1$ zu betrachten.

*) U soll ferner so klein sein, daß in allen Punkten von U die Keime der Repräsentanten Ψ_1, Ψ_2 noch teilerfremd sind.

Dort ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\frac{v_2}{v_1} \Psi_1 - \Psi_2 = 0 ,$$

und die Gleichung $\eta_2 - \Phi_2 = 0$ ist wegen $\eta_2 = \frac{v_2}{v_1} \eta_1 =$
 $= \frac{v_2}{v_1} \Phi_1 = \Delta \frac{v_2}{v_1} \Psi_1 = \Delta \Psi_2 = \Phi_2$ überflüssig.

Durch Einsetzen von η_1' und $\eta_2' := \frac{v_2}{v_1} - u_0$ sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_1 - \Phi_1 &= 0 \\ \frac{v_2}{v_1} \eta_1 - \Psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (+)$$

äquivalent zu $(*)$, und es bleibt zu zeigen:

$(x, y') \in U \times V'$ liegt genau dann in G , wenn für diesen Punkt die Gleichungen $(+)$ erfüllt sind (wobei $x \in f^{-1}(y_0)$ und $y' = (0, 0; 1; u)$ angenommen werden kann).

Liegt (x, y') in G , so sind natürlich hierfür auch die Gleichungen $(+)$ erfüllt, denn es ist $G \cap (U \times \sigma^{-1}(V)) =$

$\overline{G \cap ((U \setminus f^{-1}(y_0)) \times \sigma^{-1}(V))}$. Umgekehrt ist zu $(x, y') = (x; 0, 0; 1; u)$

mit

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 0 \\ u \Psi_1(x) &= \Psi_2(x) \end{aligned}$$

eine Punktfolge $x_v \rightarrow x$ zu finden, so daß $\phi_1(x_v) \neq 0 \neq \phi_2(x_v)$ gilt und $\frac{\Psi_2(x_v)}{\Psi_1(x_v)}$ gegen u konvergiert.

Ist $(\Psi_1(x), \Psi_2(x)) \neq (0, 0)$, so ist $u = \frac{\Psi_2(x)}{\Psi_1(x)}$ gerade der Wert

der in einer Umgebung von x holomorphen Funktion $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ und es ist nichts mehr zu zeigen.

Im Fall $(\psi_1(x), \psi_2(x)) = (0,0)$ stellen ψ_1, ψ_2 zwei teilerfremde Nichteinheiten in $\mathcal{O}_{X, x_0}$ dar, und die gesuchte Folge $x_v \rightarrow x$ ergibt sich nach einem bekannten Satz aus der Theorie der holomorphen Funktionskeime mehrerer Veränderlicher (siehe z.B. [5], S. 147).

Beweis von (3):

Sei $V := \{|\eta_1| < \varepsilon_1, |\eta_2| < \varepsilon_2\}$ die Koordinatenumgebung von $y_i \in Y_i$, wie in (2) (S. 56) präzisiert, und V' der offene Teil von $\sigma^{-1}(V) \subset C \times \mathbb{P}_1$, in dem $v_1 \neq 0$ ist. $U \subset X$ sei wieder eine hinreichend kleine Umgebung von x_0 , und $U' := U \setminus (\varphi_1^{-1}(0) \cup \varphi_2^{-1}(0) \cup \rho_1^{-1}(0) \cup \rho_2^{-1}(0))$; dann sind m_i und $\sigma^{-1}\Delta m_i$ auf U' holomorph und $\sigma^{-1}\Delta m_i$ wird auf U' beschrieben durch $(\frac{\psi_1}{\rho_1}, \frac{\psi_2}{\rho_2}; \psi_1\rho_2: \psi_2\rho_1)$.

Der Graph von $\sigma^{-1}\Delta m_i$ wird also über U' durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_1\rho_1 - \varphi_1 &= 0 \\ \eta_2\rho_2 - \varphi_2 &= 0 \\ v_1(\psi_2\rho_1) - v_2(\psi_1\rho_2) &= 0 \end{aligned} \quad (++)$$

beschrieben, und man erkennt (wie im Beweis von (1), S. 59 oben), daß die Gleichung $\eta_2\rho_2 - \varphi_2 = 0$ aus den beiden anderen folgt (wegen $\eta_2 = \frac{\psi_2}{\psi_1} \cdot \eta_1$), welche ihrerseits äquivalent sind zu den beiden ersten Gleichungen von (***). Da die von den Gleichungen (***). beschriebene Punktmenge über U' genau mit dem Graphen von

$\sigma^{-1} \Delta m_i$ übereinstimmt und abgeschlossen ist, ist der Graph von $\sigma^{-1} \Delta m_i$ nach demselben Argument wie im Beweis von (1) darin enthalten.

[Der Versuch, die andere Inklusion zu beweisen, stößt folgendermaßen auf Schwierigkeiten:

Sind für $x \in m_i^{-1}(y_i) \cap (U \setminus U')$ und $w \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0 \quad \text{und} \quad \psi_2(x)\rho_1(x) - w\psi_1(x)\rho_2(x) = 0 \quad \text{erfüllt,}$$

so ist eine Folge $x_v \rightarrow x$ mit $x_v \in U'$ zu finden mit $m_i(x_v) \rightarrow y_i$ (d.h. $\frac{\varphi_j}{\rho_j}(x_v) \rightarrow 0$ für $j = 1, 2$) und $\frac{\psi_2(x_v)\rho_1(x_v)}{\psi_1(x_v)\rho_2(x_v)} \rightarrow w$.

Da $\psi_1\rho_2$ und $\psi_2\rho_1$ in $\mathcal{O}_{X,x}$ (für genügend kleines U , d.h. x genügend nahe bei x_0) noch teilerfremde Nichteinheiten sind, folgt die Existenz einer Folge (x_v) mit $\frac{\psi_2(x_v)\rho_1(x_v)}{\psi_1(x_v)\rho_2(x_v)} \rightarrow w$ wieder aus [5], S. 147.

Im allg. gilt dann jedoch noch nicht $m_i(x_v) \rightarrow y_i$.]

Die letzten beiden Gleichungen von (***) folgen aus denen von (**) einfach durch Einsetzen der neuen Koordinaten.

Beweis von (2):

Wie schon angedeutet, stellt (1) den Induktionsanfang dar mit

$$\Phi_1 = \varphi_1, \quad \Phi_2 = \varphi_2, \quad \rho_1 = \rho_2 \equiv 1, \quad \text{und} \quad P_1(\eta_1, \eta_2) = \eta_1, \quad P_2(\eta_1, \eta_2) = \eta_2.$$

Der Induktionsschritt (3) liefert dann den vollständigen Beweis, denn

für alle $w_0 \in \mathbb{C}$ sind mit $\psi_1 \rho_2$ und $\psi_2 \rho_1$ auch $\psi_1 \rho_2$ und $(\psi_2 \rho_1 - w_0 \psi_1 \rho_2)$ teilerfremd, so daß alle Teilerfremdheitsbedingungen von (**) auch bei (***) erfüllt sind. $\square$

3.5 Die Ergebnisse des Lemmas in 3.4 bringen eine Darstellung der Ideale in $\mathcal{O}_{X, x_0}$ mit sich, welche die Keime der Fasern $m_i^{-1}(y_i) \supset m_{i+1}^{-1}(y_{i+1})$ usw. in $x_0 \in X$ beschreiben. Mit den Bezeichnungen von (2) (S. 56) etwa entspricht der Inklusion

$$(m_i^{-1}(y_i))_{x_0} \supset (m_{i+1}^{-1}(y_{i+1}))_{x_0}$$

die folgende zwischen den zugehörigen Idealen:

$$(\varphi_1 \cdot \rho_2) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0} \subset (\varphi_1 \cdot \psi_2 \rho_1 - w_0 \psi_1 \rho_2) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0}.$$

Man sieht, daß in diesem allgemeinen Fall die "Nenner" ρ_1, ρ_2 für den weiteren Beweisgang Unannehmlichkeiten bringen. Nun kann man in den Gleichungen (**) $\rho_1 = \rho_2 \equiv 1$ annehmen, wenn m_i in x_0 holomorph ist. Nach der universellen Eigenschaft des σ -Prozesses ist dies genau dann der Fall, wenn $m_{i-1}^{-1}(y_{i-1})$ in x_0 Hyperfläche ist. Zum Beweis, daß die absteigende Folge von komplexen Unterraumkeimen (mit i.allg. nichtreduzierter Struktur)

$$(m_i^{-1}(y_i))_{x_0} \supset (m_{i+1}^{-1}(y_{i+1}))_{x_0} \supset \dots$$

nicht stationär werden kann, wollen wir also x_0 so wählen, daß alle $m_i^{-1}(y_i)$ und $f^{-1}(y_0)$ in x_0 Hyperfläche sind.

Daß dies möglich ist, sieht man folgendermaßen ein:

- a) Da X als Mannigfaltigkeit normal ist, hat die analytische Menge der Unbestimmtheitsstellen einer meromorphen Abbildung $m_i: X \rightarrow Y_i$ eine Kodimension von mindestens 2; außerhalb einer Menge von diskreten Punkten ist also m_i holomorph, und da wir nur abzählbar viele meromorphe Abbildungen m_i haben, gibt es $x_0 \in X$, wo jedes m_i holomorph ist.
- b) Eine andere Begründung ergibt sich aus der folgenden Bemerkung, wenn man sie auf die Fasern $m_i^{-1}(y_i)$ in X anwendet:

BEMERKUNG: Sei $Z \subset X$ ein rein-1-dimensionaler komplexer Unterraum der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit X . Dann gibt es eine diskrete Menge $E \subset X$, so daß $Z \setminus E$ Hyperfläche ist.

Beweis: Nach der Noether-Lasker-Zerlegung der kohärenten Idealgarbe $J \subset \mathcal{O}_X$, welche Z in X definiert, in Primärkomponenten ([SIU, Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969)]) genügt es zu zeigen: Hat ein Primärideal in $\mathcal{O}_{X,x}$ die Eigenschaft, daß sein Radikal ein Hauptideal ist, so ist es selbst ein Hauptideal. (Das Ideal einer 1-dimensionalen Komponente von Z hat diese Eigenschaft etwa nach [6], S. 131, Satz 10).

Sei also $q \subset \mathcal{O}_{X,x}$ ein Primärideal mit $\sqrt{q} = (x)$, $x \in \mathcal{O}_{X,x}$. Wir nehmen $r \in \mathbb{N}$ minimal, so daß $x^r \in q$. Behauptung: $q = (x^r)$. In der Tat! Wäre nämlich $\alpha \in q \subset (x)$ und $\alpha = x^s \alpha'$ mit $1 \leq s < r$ und $\alpha' \notin (x)$, so ist wegen der Minimalität von r der Faktor x^s nicht in q , also müßte, da q primär ist, eine Potenz von α' in q liegen und damit durch x teilbar sein. Widerspruch! $\square$)

Zum Beweis von 3.1 schließen wir nun an 3.3 (S. 54) an:

Sei $x_0 \in (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} m_i^{-1}(y_i)) \cap K$, so daß jedes $m_i^{-1}(y_i)$ in x_0 Hyperfläche ($\neq \emptyset$) und also jedes m_{i+1} in x_0 holomorph ist.

Wir halten ein i_0 fest und betrachten (mit den Bezeichnungen und Koordinaten-Vereinbarungen aus 3.4) das Ideal des Keimes von $m_{i_0}^{-1}(y_{i_0})$ in x_0 :

$$(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0} \quad . \quad (x)$$

Als Ideal einer Hyperfläche ist es ein Hauptideal $(\lambda) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0}$, d.h. es ist $\varphi_1 = \alpha \lambda$, $\varphi_2 = \beta \lambda$, wo α und β nicht beides Nichteinheiten sind. Sei oBdA α Einheit und $\varphi_2 = \beta' \cdot \lambda^{l_1}$ mit $l_1 \geq 1$ und $\beta' \notin (\lambda) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0}$. Die Anwendung von (1) aus dem Lemma in 3.4 bringt für das Ideal von $m_{i_0+1}^{-1}(y_{i_0+1})$ die Gestalt

$$(\varphi_1, \beta' \cdot \lambda^{l_1-1} - u_0 \alpha) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0} \quad . \quad (xx)$$

Im Fall $l_1 > 1$ ist λ^{l_1-1} noch Nichteinheit und für $u_0 \neq 0$ die zweite Erzeugende $\beta' \cdot \lambda^{l_1-1} - u_0 \alpha$ eine Einheit; wir finden also notwendig $u_0 = 0$ (sonst ist die Faser leer) und haben dann noch eine Gleichheit der Ideale (x) und (xx)!

Die in x_0 holomorphe Abbildung m_{i+1} wird nach 3.4, (1) (*) dargestellt durch

$$(\varphi_1, \alpha^{-1}(\beta' \lambda^{l_1-1} - u_0 \alpha)) = (\varphi_1, \alpha^{-1} \beta' \lambda^{l_1-1})$$

(hier ist $\varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = \beta' \lambda^{l_1-1}$ und $u_0 = 0$)

und nach (l_1-1) -facher Iteration des σ -Prozesses durch

$$(\varphi_1, \alpha^{-l_1+1} \beta' \lambda) .$$

Der darauffolgende Schritt bringt für $m_{i_0+l_1}^{-1}(y_{i_0+l_1})$ in x_0 das Ideal

$$(\varphi_1, \alpha^{-l_1} \beta' - u_{l_1}) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0} . \quad (xxx)$$

Ist $\beta' \notin (\lambda) \mathcal{O}_{X, x_0}$ Nichteinheit, so ist nur $u_{l_1} = 0$ interessant; dann hat man aber eine echte Inklusion der Ideale (x) und (xxx) :

$$(\lambda) \mathcal{O}_{X, x_0} = (\varphi_1, \varphi_2) \mathcal{O}_{X, x_0} \subsetneq (\varphi_1, \beta') \mathcal{O}_{X, x_0} .$$

Ist β' Einheit, so kann für $u_{l_1} := \beta'(x_0) \alpha^{-l_1}(x_0)$ die Nichteinheit $\alpha^{-l_1} \beta' - u_{l_1}$ wieder Vielfaches von λ sein, so daß die Ideale (x) und (xxx) noch übereinstimmen.

Man kommt so zu einer Darstellung

$$\alpha^{-l_1} \beta' - u_{l_1} = \lambda^{l_2} \beta'' \quad \text{mit } l_2 \geq 1, \quad \beta'' \notin (\lambda) \cdot \mathcal{O}_{X, x_0}$$

und kann nun das obige Verfahren auf die in x_0 durch

$$(\varphi_1, \alpha^{-l_1} \beta' - u_{l_1}) = (\lambda \alpha, \lambda^{l_2} \beta'')$$

gegebene holomorphe Abbildung $m_{i_0+l_1}$ anwenden.

Zum Beweis von 3.1 ist zu zeigen, daß das Verfahren nach endlich vielen Schritten zu einem Ideal für $(m_j^{-1}(y_j))_{x_0}$ ($j > i_0$) führt, welches das Ideal (x) echt umfaßt.

Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann muß auch β'' wieder

Einheit sein und man erhält eine Folge von Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \beta' - c_1 &= \lambda^1 \beta'' & (c_1 := u_{11}) \\ \alpha^{-1} \beta'' - c_2 &= \lambda^1 \beta''' & \text{usw.} \\ &\vdots & \end{aligned}$$

die wir umschreiben zu

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha^1 (c_1 + \lambda^1 \beta'') \\ \beta'' &= \alpha^1 (c_2 + \lambda^1 \beta''') \\ &\vdots \\ \beta^{(n)} &= \alpha^1 (c_n + \lambda^{n+1} \beta^{(n+1)}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

wobei jedes $\beta^{(n)}$ Einheit und jedes $\lambda_n \geq 1$ ist.

Durch sukzessives Einsetzen erhält man unmittelbar für jedes n eine Darstellung

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha^1 (c_1 + \alpha^1 \lambda^1 c_2 + \alpha^1 \lambda^1 \lambda^1 c_3 + \dots \\ &\quad \dots + \alpha^1 \lambda^{2+\dots+1_n} c_n) + \alpha^1 \lambda^{1+\dots+1_n} \beta^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Erinnern wir uns an $\phi_1 = \alpha\lambda$; dann bedeutet dies

$$\beta' = \alpha^1 (c_1 + \sum_{i=2}^n \phi_1^{12+\dots+1_i} c_i) \in (\lambda^{12+\dots+1_{n+1}}) \cdot \mathcal{O}_{X, X_0}.$$

Nun rechnen wir für einen Moment nicht in $\mathcal{O}_{X, X_0} \cong \mathbb{C}\{\xi_1, \xi_2\}$,

sondern im formalen Potenzreihenring $\mathbb{C}[[\xi_1, \xi_2]]$ weiter.

Dann können wir mit der Nichteinheit φ_1 die formale Potenzreihe

$$A(\varphi_1) := c_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_1^{l_2 + \dots + l_i} c_i$$

bilden und finden

$$\beta' - \alpha^{l_1} \cdot A(\varphi_1) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda^n) \cdot \mathcal{O}_{X, X_0} = (0)$$

(denn λ ist Nichteinheit und alle l_i sind ≥ 1).

Also ist $\beta' = \alpha^{l_1} \cdot A(\varphi_1)$ und $\varphi_2 = \beta' \cdot \lambda^{l_1} = \varphi_1^{l_1} \cdot A(\varphi_1)$.

In den lokalen Koordinaten ξ_1, ξ_2 um $x_0 \in X$ und η_1, η_2 um $y_{i_0} \in Y_{i_0}$ wird also die bei x_0 holomorphe Abbildung m_{i_0} beschrieben durch $(\varphi_1, \varphi_1^{l_1} \cdot A(\varphi_1))$ mit $l_1 \geq 1$, $A(\varphi_1) \in \mathbb{C}[[\varphi_1]]$. Die Funktionalmatrix von m_{i_0} bei x_0 ist dann von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} \\ l_1 \varphi_1^{l_1-1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} A(\varphi_1) + \varphi_1^{l_1} \cdot A'(\varphi_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & l_1 \varphi_1^{l_1-1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} A(\varphi_1) + \varphi_1^{l_1} A'(\varphi_1) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Darin ist die zweite Zeile ein Vielfaches der ersten, so daß in der Umgebung von x_0 die Funktionaldeterminante von m_{i_0} identisch verschwindet. Dies gilt dann wegen $f = (k_1 \circ \dots \circ k_{i_0}) \circ m_{i_0}$ auch von der Funktionaldeterminante von f im Widerspruch zur Voraussetzung in

3.1 !

□□□

§4. FAST ÜBERALL ENDLICHE EIGENTLICHE HOLOMORPHE

ABBILDUNGEN

In diesem Paragraphen bringen wir einen Beweis *) des folgenden Satzes:

4.1 SATZ: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine eigentliche surjektive holomorphe

Abbildung zwischen reduzierten komplexen Räumen; die offene

Menge $X_0 := \{ x \in X : f \text{ in Umgebung von } x \text{ biholomorph} \}$

sei dicht in X .

Dann gibt es eigentliche Modifikationen $h: X' \rightarrow X$ und

$k: Y' \rightarrow Y$ sowie eine endliche holomorphe Abbildung $f': X' \rightarrow Y'$

mit $k \circ f' = f \circ h$.

Man beachte, daß hier nichts darüber ausgesagt wird, ob $k: Y' \rightarrow Y$ durch iterierte monoidale Transformationen erhalten werden kann (dies folgt natürlich auf anderem Weg aus [11])!

Die Voraussetzung an X_0 ist z.B. stets erfüllt, wenn X irreduzibel und $\dim X = \dim Y$ ist; da f eigentlich und surjektiv ist, folgt auch, daß $Y_0 := Y \setminus f(X \setminus X_0)$ dicht in Y ist.

*) Die Beweisidee hat SINZINGER schon in [16] (Satz 1.2.3) verwendet. Ich danke ihm in diesem Zusammenhang für nützliche Hinweise zu einem Beweis von 4.1.

4.2 Zunächst erinnern wir an symmetrische Produkte komplexer Räume und einige ihrer Eigenschaften, die im Beweis von 4.1 eine wesentliche Rolle spielen werden. Obwohl wir es dabei nur mit reduzierten komplexen Räumen zu tun haben, darf man in diesem Abschnitt auch an allgemeine komplexe Räume denken: Die Aussagen bleiben alle gültig, auch wenn manche Verifikationen im nicht-reduzierten Fall einige Zusatzüberlegungen erfordern. Wir gehen hierauf nicht ein, um den Beweis von 4.1 nicht unnötig zu verzögern.

Die Gruppe S_n der Permutationen von n Elementen operiert in natürlicher Weise auf dem n -fachen kartesischen Produkt X^n eines komplexen Raumes durch "Vertauschen der Komponenten"; faßt man S_n als komplexen Raum auf ($n!$ "einfache Punkte"), so wird diese Operation durch eine holomorphe Abbildung $s: X^n \times S_n \rightarrow X^n$ dargestellt. Das n -fache symmetrische Produkt von X ist definiert als Kokern des Doppelpfeils $X^n \times S_n \xrightleftharpoons[\text{pr}]{s} X^n$ (pr bezeichnet die Projektion) in der Kategorie der komplexen Räume; wir bezeichnen es mit $X^{(n)}$ und den kanonischen Morphismus mit $q: X^n \rightarrow X^{(n)}$. Das symmetrische Produkt ist also einfach der Quotient von X^n nach der Äquivalenzrelation, bei der zwei Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ äquivalent sind, wenn ihre Komponenten durch Permutation auseinander hervorgehen.

Nach H. CARTAN (*Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes*. Algebr. Geom. u. Topol., Symp. Lefschetz, Princeton 1957) ist im reduzierten Fall dieser Quotient wieder ein komplexer Raum;

für den nichtreduzierten Fall hat B. KAUP (*Äquivalenzrelationen auf allgemeinen komplexen Räumen*. Schr. Math. Inst. Univ. Münster 39, 1968) Verallgemeinerungen des entsprechenden Satzes von CARTAN bereitgestellt, aus denen sich unmittelbar die Existenz des Kokerns als komplexer Raum ergibt. Für einen etwas anderen Zugang sei auf WHITNEY [18] verwiesen.

Wir verwenden die Bezeichnungen $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, $q(x) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle x \rangle = z \in X^{(n)}$; mit $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in X^{n-1}$ und $z' = q(x') \in X^{(n-1)}$ schreiben wir auch $q(x) = \langle z', x_n \rangle$. Dies ist nicht ganz konsequent, aber bequem für das Folgende und im Zusammenhang unmißverständlich. Wir sprechen von den Punkten von $X^{(n)}$ als "ungeordneten n-Tupeln" von Elementen von X .

Die Abbildung q ist endlich (die Fasern bestehen aus höchstens $n!$ Punkten), abgeschlossen und offen, sie ist aber - nebenbei gesagt - für $n \geq 2$ und $\dim X \geq 2$ nicht platt (man betrachte $(\mathbb{C}^2)^{(2)} \cong \mathbb{C}^2 \times Z$ mit $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3: xy = z^2\}$ und $q(u_1, u_2; v_1, v_2) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, (u_1 - v_1)^2, (u_2 - v_2)^2, (u_1 - v_1)(u_2 - v_2))$).

Die komplexen Unterräume von $X^{(n)}$ entsprechen genau den symmetrischen Unterräumen von X^n , d.h. den Unterräumen, die unter der Operation von S_n invariant sind. Ist speziell $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, so ist das n -fache Faserprodukt von f mit sich selbst ein symmetrischer Unterraum $X_Y^n \subset X^n$, dem ein Unterraum $q(X_Y^n) =: X_Y^{(n)} \subset X^{(n)}$ entspricht. $X_Y^{(n)}$ ist das relative symmetrische Produkt in der Kategorie der komplexen Räume über Y .

Für jedes Paar (n, m) von natürlichen Zahlen gibt es eine natürliche endliche Quotientenabbildung $\alpha_{n, m}: X^{(n)} \times X^{(m)} \rightarrow X^{(n+m)}$, welche einfach ein "ungeordnetes n -Tupel" und ein "ungeordnetes m -Tupel"

zusammenfaßt zu einem "ungeordneten n+m-Tupel".

Betrachten wir die holomorphe Abbildung

$$\iota: X^{(n-1)} \times X \xrightarrow{(\alpha_{n-1,1}; \text{pr}_X)} X^{(n)} \times X.$$

Sie ist injektiv und abgeschlossen, und ihr Bild $G \subset X^{(n)} \times X$ entspricht einem Unterraum $\widetilde{G} \subset X^n \times X$, der in X^n symmetrisch ist und beschrieben werden kann als $\widetilde{G} = \bigcup_{i=1}^n \{(x_1, \dots, x_n; x_0) \in X^n \times X : x_i = x_0\} =$

$$= \bigcup_{i=1}^n \ker(X^n \times X \xrightarrow[\text{pr}_i \circ \text{pr}_{X^n}]{\text{pr}_X} X).$$

Wir nennen ι die *kanonische Einbettung*. $X^{(n-1)} \times X$ kann vermöge ι als Graph $G \subset X^{(n)} \times X$ der natürlichen *Korrespondenz* $X^{(n)} \multimap X$ aufgefaßt werden, welche einem $z \in X^{(n)}$ die Menge der Komponenten von z zuordnet. (Bei nichtreduziertem X sind zum Nachweis der Eigenschaften von ι Zusatzüberlegungen notwendig, auf die wir hier nicht eingehen).

4.3 Beweis von 4.1 (O.B.d.A. können wir Y als irreduzibel voraussetzen).

Wir betrachten die Beschränkung von f auf $\widetilde{X}_0 := f^{-1}(Y_0) \subset X_0$ (X_0, Y_0 wie in (4.1), S.68). $\widetilde{X}_0$ ist ebenfalls noch dicht in X , und $f|_{\widetilde{X}_0} \rightarrow Y_0$ ist eine unverzweigte Überlagerung. Da wir Y als irreduzibel voraussetzen, ist Y_0 zusammenhängend. Dann ist die "Blätterzahl" $n := \text{card } f^{-1}(y)$ konstant auf Y_0 (siehe z.B. [15], B6/B7).

Mit diesem n bilden wir das n -fache Faserprodukt von X über Y bzgl. $f: X \times_Y \dots \times_Y X \subset X^n$. Wie in 4.2 bereits erwähnt, entspricht ihm der Unterraum $X_Y^{(n)}$ des symmetrischen Produkts $X^{(n)}$,

und die kanonische Abbildung $X_Y^n \rightarrow Y$ induziert eine holomorphe Abbildung $X_Y^{(n)} \rightarrow Y$.

Wir bezeichnen den Graphen der holomorphen Abbildung $X_Y^{(n)} \rightarrow Y$ mit $W \subset X_Y^{(n)} \times Y$; da f und damit auch $X_Y^{(n)} \rightarrow Y$ eigentlich ist, ist auch die Projektion $W \rightarrow Y$ eigentlich.

Weiter sei ${}^oX_Y^{(n)} \subset X_Y^{(n)}$ die offene Teilmenge derjenigen Punkte von $X_Y^{(n)}$, deren Komponenten paarweise verschieden sind. Damit setzen wir

$$Y' := \overline{W \cap ({}^oX_Y^{(n)} \times Y_0)}$$

und bezeichnen die Beschränkung der Projektion $X_Y^{(n)} \times Y \rightarrow Y$ auf Y' mit $k: Y' \rightarrow Y$.

Als erstes ist zu zeigen: k ist eigentliche Modifikationsabbildung.

Da k die Beschränkung der eigentlichen Projektion $W \rightarrow Y$ auf den abgeschlossenen Teil $Y' \subset W$ ist, ist k eigentlich.

Nach Definition von Y' und nach den Aussagen des Rittschen Lemmas

(1.4) ist $k^{-1}(Y \setminus Y_0)$ analytisch dünn in Y' , so daß nur noch fehlt: $k^{-1}|_{Y_0} \rightarrow Y' \setminus k^{-1}(Y \setminus Y_0)$ ist holomorph. Aber $k^{-1}|_{Y_0}$ ordnet einem $y \in Y_0$ gerade den Punkt $(\langle f^{-1}(y) \rangle, y)$ zu, aus dem

$W \cap ({}^oX_Y^{(n)} \times \{y\})$ besteht, da $f^{-1}(y)$ aus n paarweise verschiedenen Punkten besteht. Nun ist $q: X^n \rightarrow X^{(n)}$ in der Umgebung eines Punktes x mit lauter verschiedenen Komponenten biholomorph, also ist ${}^oX^{(n)}$ lokal isomorph zu X^n , und eine Abbildung nach ${}^oX^{(n)}$ ist holomorph, wenn ihre Komponenten holomorph sind. Damit ist schließlich k^{-1} auf Y_0 holomorph, weil f über Y_0 lokal biholomorph ist!

(Man bemerkt, daß $Y' \subset X_Y^{(n)} \times Y \subset X^{(n)} \times Y$ der Graph einer meromorphen Abbildung $Y \rightarrow X^{(n)}$ ist; dies ist die meromorphe Abbildung, die nach [16], Satz 1.2.3 zur Korrespondenz $f^{-1}: Y \rightarrow X$ gehört).

Es bleibt zu zeigen:

Ist $X' \subset X \times Y'$ der Graph der meromorphen Komposition $k^{-1}_{\Delta} f$ und sind $h: X' \rightarrow X$, $f': X' \rightarrow Y'$ die Projektionen, so ist f' endlich.

Dazu beobachten wir zunächst, daß sich die Inklusion

$$X' \subset X \times X^{(n)} \times Y \quad (\text{aus } Y' \subset X^{(n)} \times Y)$$

faktoriisiert über die kanonische Einbettung $X \times X^{(n-1)} \subset X \times X^{(n)}$:

$$\begin{array}{ccc} X' & \hookrightarrow & X \times X^{(n)} \times Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & X \times X^{(n-1)} \times Y & \end{array}$$

Dies ergibt sich daraus, daß über Y_0 und $\widetilde{X}_0$ die Einbettungen beschrieben werden können durch

$$\begin{array}{ccc} X' \ni (x, y') = (x, \langle f^{-1}(f(x)) \rangle, f(x)) \in X \times X^{(n)} \times Y & \ni & (x, \langle z', x \rangle, y) \\ \searrow \downarrow & & \uparrow \quad \uparrow \\ (x, \langle f^{-1}(f(x)) \setminus \{x\} \rangle, f(x)) \in X \times X^{(n-1)} \times Y & \ni & (x, \langle z' \rangle, y) \end{array}$$

die Behauptung also klar ist. Die Inklusionen bleiben aber beim anschließenden topologischen Abschluß in $X \times_Y X_Y^{(n)} \times Y$ erhalten.

Damit finden wir

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X \times X_Y^{(n-1)} \times Y & \xrightarrow{\alpha \times \text{id}_Y} & X_Y^{(n)} \times Y
 \end{array}$$

und es bleibt zu zeigen, daß dieses Quadrat kartesisch ist, d.h.

$X' \simeq (\alpha \times \text{id}_Y)^{-1}(Y')$. Dann ist mit $\alpha \times \text{id}_Y$ auch f' endlich!

Aber das ist wieder klar über $\tilde{X}_0$ bzw. Y_0 und durch topologischen Abschluß folgt die Behauptung, denn für jedes $U \subset X_Y^{(n)} \times Y$ gilt:

$$\overline{(\alpha \times \text{id}_Y)^{-1}(U)} = (\alpha \times \text{id}_Y)^{-1}(\overline{U}).$$

" $\supset$ " ist gleichwertig mit der Stetigkeit von $\alpha \times \text{id}_Y$, und " $\subset$ " folgt aus der Offenheit von $\alpha \times \text{id}_Y$.

Damit ist 4.1 vollständig bewiesen.

□□□

BEMERKUNG: Ist X projektiv algebraisch und $f: X \rightarrow Y$ eine beliebige holomorphe Abbildung, so gibt es eigentliche Modifikationen wie in 4.1 und eine holomorphe Abbildung $f': X' \rightarrow Y'$ von konstantem Rang mit $k \circ f' = f \circ h$. Der Beweis hierfür wird mit Hilfe der Chow-Varietät von X und der Methoden und Ergebnisse von SINZINGER [16] auf 4.1 zurückgeführt. Weitere Verallgemeinerungen sollten sich vielleicht an [1] orientieren.

L I T E R A T U R

- [1] BARLET, D.: Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. Fonctions de Plusieurs Variables Complexes II, Lecture Notes in Mathematics 482 , Springer 1975.
- [2] DOUADY, A.: Espaces analytiques sous-algébriques (d'après B.G. Moisezon). Séminaire Bourbaki, 20^e année, 1967/68, n^o 344.
- [3] FISCHER, G.: Ein relativer Satz von Chow und die Elimination der Unbestimmtheitsstellen meromorpher Funktionen. Math. Ann. 217 (1975) 145-152.
- [4] FISCHER, G.: Complex Analytic Geometry. Lecture Notes in Mathematics 538, Springer-Verlag 1976.
- [5] GRAUERT, H.; FRITZSCHE, K.: Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.
- [6] GRAUERT, H.; REMMERT, R.: Analytische Stellenalgebren. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
- [7] GROTHENDIECK, A.: Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. II. Publ. I.H.E.S., Paris 1961.
- [8] HIRONAKA, H.: Smoothing of algebraic cycles of small dimensions. Amer. Journal of Math. 90 (1968) 1-54.
- [9] HIRONAKA, H.: Normal cones in analytic Whitney stratifications. Publ. I.H.E.S. Nr. 36 (1969) 127-138.

- [10] HIRONAKA, H.: Flattening of Analytic Maps. Manifolds-Tokyo 1973 (Proceedings), p. 313-321. University of Tokyo Press, 1975.
- [11] HIRONAKA, H.: Flattening Theorem in Complex-Analytic Geometry. Amer. Journal of Math. 97 (1975) 503-547.
- [12] HIRONAKA, H.; ROSSI, H.: On the Equivalence of Imbeddings of Exceptional Complex Spaces. Math. Ann. 156 (1964) 313-333.
- [13] HOPF, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helvetici 29 (1955) 132-156.
- [14] HOUZEL, C.: Géométrie analytique locale. Séminaire Henri Cartan, 13ième année (1960/61), exposés 18-21.
- [15] KERNER, H.: Komplexe Räume; Komplexe Analysis. Vorlesungen Universität München 1969/70. Skriptum, Nachdruck 1974.
- [16] SINZINGER, H.: Zur Faktorisierung von Korrespondenzen über Abbildungen. Dissertation, München 1976.
- [17] STEIN, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen, II. Amer. Journal of Math. 86 (1964) 823-868.
- [18] WHITNEY, H.: Complex Analytic Varieties. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1972.

Lebenslauf

Am 31. Dezember 1945 wurde ich als erstes von neun Kindern der Eheleute Josef Maurer und Katharina, geborene Reiter, in Thannet (Kreis Vilshofen, Niederbayern) geboren. Die Volksschule besuchte ich während der Jahre 1952 bis 1956 in Neukirchen am Inn; danach trat ich zur Oberrealschule Passau über, wo ich 1965 das Abitur ablegte. Nach der Wehrdienstzeit konnte ich im Wintersemester 1967/1968 mit Mitteln nach §27 BVG an der Universität München das Studium der Mathematik und Physik beginnen. Nach dem Vordiplom im Herbst 1969 vermittelte mir der DAAD ein Stipendium der Französischen Regierung zu einem zweijährigen Studium an der Universität Nizza (1970 - 1972). Dabei erwarb ich als französischen Studienabschluß die "Maîtrise de Recherche". Im Juni 1973 - wieder zurück in München - folgte das Hauptdiplom und bald darauf eine Anstellung am Mathematischen Institut der Universität München als Verwalter einer Assistentenstelle.

Ich hörte Vorlesungen bei den Herren Baouendi, Hämmerlin, Houzel, Jörgens, Kerner, Koecher, Martineau, Pham, Salecker, Sizmann, Stein, Süßmann, Wienholtz und anderen.

Seit September 1973 bin ich verheiratet mit Ghislaine Locquet aus Cannes (Frankreich), und im April 1975 ist unser Bub Sebastian auf die Welt gekommen.

München, den 30. November 1976

Joseph Maurer

